ESIEE AMIENS	**CONTROLE n°2** Matière : **PROBABILITES ET STATISTIQUES** Remis par : P. Dassonvalle	Année : **I3** Date : 5.11.20 Durée : 2 h. Feuille n° 1/6
NOM : MAUBANC	**PRENOM :** Rémi	

Cours et TD autorisés
Calculatrice autorisée, Excel recommandé
Les réponses doivent être rédigées et détaillées
Simplifiez au maximum les réponses
Rédigez sur ce folio, le scanner en fin d'épreuve et l'envoyer sous votre nom (en majuscule, sans prénom) avec le fichier Excel à dassonvalle@esiee-amiens.fr

---

I. Une boite contient 12 boules numérotées de 1 à 12. On tire aléatoirement une de ces boules. On considère les variables aléatoires suivantes :

$X =$ "Le numéro est pair" et $Y =$ "Le numéro est un multiple de 3"

1). Le variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes (démonstration obligatoire) ?

$P(X) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ et $P(Y) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ d'où $P(X).P(Y) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

et $P(X \cap Y) = P(X).P_X(Y) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{12} = \frac{1}{12}$

Comme $P(X \cap Y) \neq P(X).P(Y)$ alors les variables aléatoires X et Y ne sont pas idépendantes.

2). Même question, si la boite contient 13 boules (démonstration obligatoire) ?

$P(X) = \frac{6}{13}$ et $P(Y) = \frac{4}{13}$ d'où $P(X).P(Y) = \frac{6}{13} \cdot \frac{4}{13} = \frac{24}{169}$

et $P(X \cap Y) = P(X).P_X(Y) = \frac{6}{13} \cdot \frac{2}{13} = \frac{12}{169}$

Comme $P(X \cap Y) \neq P(X).P(Y)$ alors les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes.

II. On considère une fratrie ordonnée de 2 enfants et les 3 variables aléatoires suivantes :
X = "Les 2 enfants sont de sexes différents", Y = "Le cadet est un garçon", Z = "L'ainé est une fille"
Montrer que X, Y et Z sont deux à deux indépendantes mais pas mutuellement indépendant.

$\Omega = \{(F,F);(F,G);(G,F);(G,G)\}$ d'où

$P(X)=\frac{1}{2}$; $P(Y)=\frac{1}{2}$; $P(Z)=\frac{1}{2}$.

• $P(X).P(Y)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ et $P(X\cap Y)=P(X).P_X(Y)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ X et Y indépendant.

• $P(X).P(Z)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ et $P(X\cap Z)=P(X).P_X(Z)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ X et Z indépendant

• $P(Y).P(Z)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ et $P(Y\cap Z)=P(Y).P_Y(Z)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ Y et Z indépendant

> $P(X).P(Y).P(Z)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$

$P(X\cap Y\cap Z)=P((X\cap Y)\cap Z)=P(X\cap Y).P_Z(X\cap Y)=\overbrace{P(X).P(Y)}^{\text{car X et Y ind.}}.P_Z(X\cap Y)$

$P(X\cap Y\cap Z)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$

$P(X\cap Y\cap Z)\neq P(X).P(Y).P(Z)$ donc X, Y et Z ne sont pas indépendant mutuellement

III. Dans une entreprise 2 chaines de production produisent la même pièce. En une journée, la chaine 1 produit 2 fois plus de pièces que la chaine 2. Sur la chaine 1, le pourcentage de pièces défectueuses est de 3% alors qu'il est de 4% sur la chaine 2. On prélève une pièce au hasard sur l'ensemble de la production.

1). Quelle est la probabilité qu'elle provienne de la chaine 1 ?

$P(\text{"Chaine 1"})=\frac{2}{3}$

2). Quelle est la probabilité qu'elle provienne de la chaine 1 et qu'elle soit défectueuse ?

$P(\text{"Chaine 1"}\cap\text{"Defectueuse"})=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{100}=\frac{6}{300}=\frac{2}{100}=2\%$

3). Quelle est la probabilité qu'elle provienne de la chaine 1 sachant qu'elle est défectueuse ?

$P_{\text{"Defectueuse"}}(\text{"Chaine 1"})=\dfrac{P(\text{"Chaine 1"}\cap\text{"Defectueuse"})}{P(\text{"Defectueuse"})}=\dfrac{\frac{2}{100}}{\quad}$

$P(\text{"Defectueuse"})=P(\text{"Chaine 1"}\cap\text{"}$

IV. Sur une ligne de production, on pose les étiquettes sur des bouteilles. 5% des étiquettes sont mal posées. Le contrôle qualité est tel que :

- si l'étiquette est bien posée, la bouteille est acceptée avec une probabilité de 0,96,
- si l'étiquette est mal posée, la bouteille est rejetée avec une probabilité de 0,98.

On choisit une bouteille au hasard.

1). Quelle est la probabilité qu'il y ait une erreur de contrôle ?

$P(\text{"Erreur"}) = P(\text{"Rejeté"} \cap \text{"Bien posée"}) + P(\text{"Accepté"} \cap \text{"Mal posée"})$

$= P(\text{"bien posé"}) \cdot P_{\text{"bien posée"}}(\text{"Rejeté"}) + P(\text{"mal posé"}) \cdot P_{\text{"mal posée"}}(\text{"Accepté"})$

$= \frac{95}{100} \cdot \frac{4}{100} + \frac{5}{100} \cdot \frac{2}{100} = \frac{39}{1000} = 0{,}39\%$

2). Qu'une bouteille acceptée soit mal étiquetée ?

$P(\text{"Accepté"}) = P(\text{"Bien posé"}) \cdot P_{\text{"Bien posée"}}(\text{"Accepté"}) + P(\text{"Mal posée"}) \cdot P_{\text{"Mal posée"}}(\text{"Accepté"})$

$P(\text{"Accepté"}) = \frac{95}{100} \cdot \frac{96}{100} + \frac{5}{100} \cdot \frac{2}{100} = \frac{913}{1000} = 91{,}3\%$

$P_{\text{"Accepté"}}(\text{"Mal posée"}) = \frac{P(\text{"Mal posée"} \cap \text{"Accepté"})}{P(\text{"Acceptée"})} = \frac{\frac{5}{100} \cdot \frac{2}{100}}{\frac{913}{1000}} = \frac{1}{913} \simeq 1{,}09 \times 10^{-3}$ $(\simeq 0{,}109\%)$

V. On lance un dé 5 fois de suite.

1). Quelle est la probabilité d'obtenir au total 3 fois un 6 ?

Chaque lancé est indépendant :

$P(\text{"3 fois un 6"}) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{7776}$

2). Même question si on sait que l'on est tombé sur un 6 au premier lancer.

Chaque lancé est indépendant :

$P_{\text{"1 lancé à 6"}}(\text{"3 fois au total un 6"}) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{1296}$

VI. On considère les 15 réalisations suivantes triées d'une variable aléatoire X :

x 0.0376 0.0738 0.2219 0.3143 0.5473 0.6037 0.6517
0.7156 0.7162 0.9901 1.3376 1.4385 1.4628 2.4591 3.5329

On suppose qu'elles correspondent à une loi exponentielle dont on rappelle qu'elle est définie par la densité de probabilité suivante (voir cours) :

$$\begin{vmatrix} f(x)=0 & \text{si } x<0 \\ f(x)=\lambda e^{-\lambda x} & \text{si } 0 \geq x \end{vmatrix}$$

Ces données sont reportées dans le fichier Excel joint. Commencez par l'enregistrer à votre nom (en majuscules et sans prénom). Les calculs seront à effectuer dans ce fichier ce qui est bien plus simple et plus rapide que de les effectuer à la machine à calculer. Pensez à être assez clair dans ce que vous faites pour que je puisse comprendre vos calculs. Bien que les calculs soient à effectuer sous Excel vous devez en reporter les étapes sur cette feuille. Des points seront attribués à la présentation de ces calculs. Votre fichier Excel sera à m'envoyer à le fin du contrôle à l'adresse *dassonvalle@esiee-amiens.fr* .

1). Etablir l'expression de la fonction de répartition correspondant à la densité de probabilité exponentielle.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

2). Déterminer la valeur de la meilleure estimation de l'espérance de X .

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

3). Au risque de 1%, en effectuant un test du χ^2 que peut-on conclure quant à l'hypothèse faite ? (Les calculs doivent être explicités, je vous conseille de regrouper les données en 3 classes de 5 réalisations).

σ :

$$P\left(\bar{x} - t_{99,5\%}(\nu = n-1)\frac{s_{n-1}}{\sqrt{n}} \leqslant E(X) \leqslant \bar{x} + t_{99,5\%}(\nu = n-1)\frac{s_{n-1}}{\sqrt{n}}\right) = 99\%$$

$$\Leftrightarrow P\left(1{,}0068 - 3{,}326 \cdot \frac{\quad}{\sqrt{15}} \leqslant E(X) \leqslant 1{,}0068 + 3{,}326 \cdot \frac{\quad}{\sqrt{15}}\right) = 99\%$$

4). Au risque de 1%, en effectuant un test de Kolmogorov que peut-on conclure quant à l'hypothèse faite ? (Les calculs doivent être explicités).

5). Au risque de 5%, déterminer l'intervalle de confiance de l'espérance $E(X)$. On considèrera que le nombre de ddl est suffisant pour confondre la table de Student et celle de la loi normale.

Variance inconnue => Student. on cherche $IC_{95\%}(E(X))$

P(

6). Au risque de 5%, déterminer l'intervalle de confiance de l'écart-type $\sigma(X)$?

Une étude plus poussée de la variable aléatoire X montre que λ ne peut être qu'entier.

7). Les deux intervalles de confiances déterminés en 5). et 6). sont-ils compatibles avec cette dernière information ? En déduire la valeur exacte de λ.