I/ Introduction

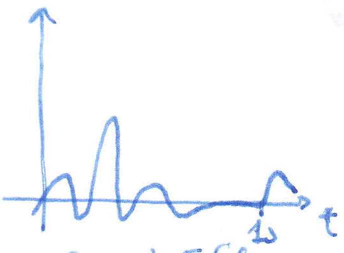
Signal : c'est une tension $v(t)$ sur un courant $i(t)$ issus d'un capteur et qui porte une information

Traitement du signal : consiste à détecter, analyser et extraire de l'information de $x(t) = \begin{cases} v(t) \\ \text{ou} \\ i(t) \end{cases}$

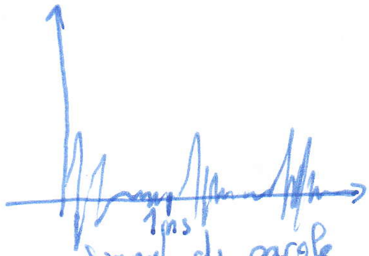
La grandeur électrique permet l'automatisation du traitement

TDS (traitement du signal) : repose sur trois disciplines : Mathématiques, l'Electronique, l'Informatique

Ex :



Signal ECG



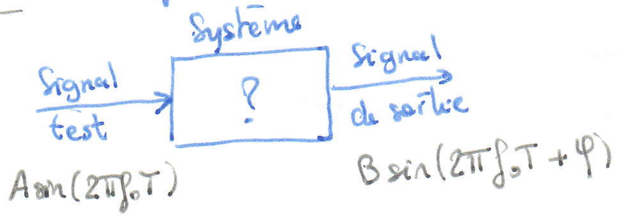
Signal de parole

Classification des signaux : se fait en fonction de notre besoin :

- fréquentielle : BF, HF, UHF, ...
- connaissance de l'évolution
  - Signaux aléatoires
  - Signaux déterministe (= fonction mathématique connu)

Signaux aléatoires : non-modélisable par une fonction mathématique. Et pourtant, ils sont porteurs d'informations.

Signaux déterministe (= certains) : Leurs fonctions mathématiques sont connues. Ce sont des signaux tests

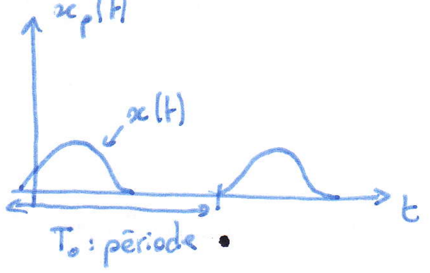


Trace : $\varphi(f)$

$\frac{B}{A} = H(f)$ fonction de transfert

Chapitre I : Signaux certains :

1) Signaux périodiques

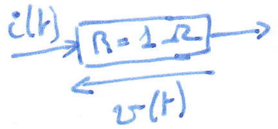


$$x_p(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} x(t - KT_0)$$

$f_0 = \dfrac{1}{T_0}$ fréquence de la fondamentale.

a- moyenne : $\bar{x} = \dfrac{1}{T} \displaystyle\int_{(T)} x_p(t)\,dt$

Puissance du signal : On considère le signal comme une tension aux bornes d'une résistance $R = 1\ \Omega$



// $x(t) = v(t)$

$$p(t) = v(t) \cdot i(t) = v(t) \cdot \frac{v(t)}{R=1} = v^2(t) = x^2(t)$$

donc $x^2(t)$: puissance du signal $x(t)$.

Energie du signal : $E_x(t_0, t_0+T) = \displaystyle\int_0^{t_0+T} x^2(t)\,dt$

Les signaux physiques réels sont bornés et limité dans le temps.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)\,dt < \infty$$

Ces signaux appartiennent à l'espace L_2 : espace des signaux à energie finis.

En théorie du signal, les signaux peuvent etre complexes : $x(t) = \underbrace{a(t)}_{\text{réel}} + j\underbrace{b(t)}_{\text{imaginaire}}$.

Dans ce cas, on définit la puissance par :

$$x(t) = x(t) \cdot \underbrace{x^*(t)}_{\text{conjugué}} = |x(t)|^2 \leftarrow \text{par convention.}$$

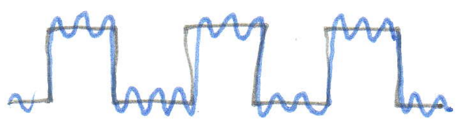
Décomposition en série de Fourier d'un signal périodique.

D'après le théorème de Dirichlet, tout signal périodique de période T est décomposable en série de Fourier :

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos\left(2\pi n \frac{t}{T}\right) + b_n \sin\left(2\pi n \frac{t}{T}\right)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{(T)} x(t) \cos\left(2\pi n \frac{t}{T}\right) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{(T)} x(t) \sin\left(2\pi n \frac{t}{T}\right) dt$$



$\sin(t) + \dfrac{\sin(3t)}{3} + \dfrac{\sin(5t)}{5} + o(t)$

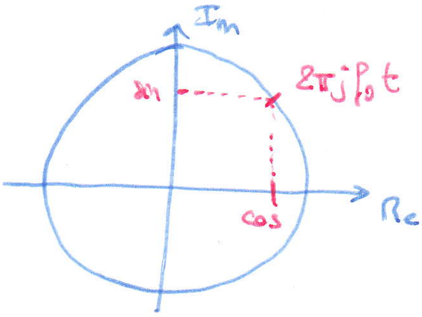
Formule d'Euler : $e^{2\pi j f_0 t} = \cos(2\pi f_0 t) + j\sin(2\pi f_0 t)$

$$\cos(2\pi f_0 t) = Re\left(e^{2\pi j f_0 t}\right) = \frac{e^{(2\pi j f_0 t)} + e^{-2\pi j f_0 t}}{2}$$

$$\sin(2\pi f_0 t) = Im\left(e^{2\pi j f_0 t}\right) = \frac{e^{2\pi j f_0 t} - e^{-2\pi j f_0 t}}{2j}$$

Formule d'Euler

Représentation par le vecteur de Fresnel : qui représente $e^{2\pi j f_0 t}$



La fréquence exprime le rythme de variation d'un signal, il s'agit d'une grandeur positive ($\mathbb{R}^+$)
Or les formules d'Euler introduisent la notion de fréquences négative ($\mathbb{R}^-$)
En remplaçant un cos par une exponentielle on facilite le traitement des équations differentielle en équation algébriques : transformées de Laplace, transformée en Z

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n \cdot \frac{e^{2\pi j n \frac{t}{T}} + e^{-2\pi j n \frac{t}{T}}}{2} + b_n \cdot \frac{e^{2\pi j n \frac{t}{T}} - e^{-2\pi j n \frac{t}{T}}}{2j}\right)$$

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\underbrace{\frac{a_n - b_n j}{2}}_{c_n} e^{2\pi j n \frac{t}{T}} + \underbrace{\frac{a_n + j b_n}{2}}_{c_n^* = c_{-n}} e^{-2\pi j n \frac{t}{T}}\right)$$

$$c_n = \frac{a_o - j b_n}{2} = \frac{1}{T}\int_{(T)} x(t)\cos\left(2\pi n \frac{t}{T}\right)dt - \frac{j}{T}\int_{(T)} x(t)\sin\left(2\pi n \frac{t}{T}\right)dt = \frac{1}{T}\int_{(T)} x(t)\underbrace{\left(\cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) - \sin\left(2\pi n \frac{t}{T}\right)\right)}_{e^{-2\pi j n \frac{t}{T}}}$$

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{(T)} x(t) e^{-2\pi j n \frac{t}{T}} dt$$

$$c_n^* = \frac{1}{T}\int_{(T)} x(t) e^{2\pi j n \frac{t}{T}} = \frac{1}{T}\int_{(T)} x(t)\cos\left(2\pi n j \frac{t}{T}\right)dt + \frac{j}{T}\int_{(T)} x(t)\sin\left(2\pi n j \frac{t}{T}\right)dt$$

$$c_{-n} = \frac{1}{T}\int_{(T)} x(t)\cos\left(2\pi n \frac{t}{T}\right)dt + j\frac{1}{T}\int_{(T)} x(t)\sin\left(-2\pi j n \frac{t}{T}\right) = \frac{a_n + b_n}{2}$$

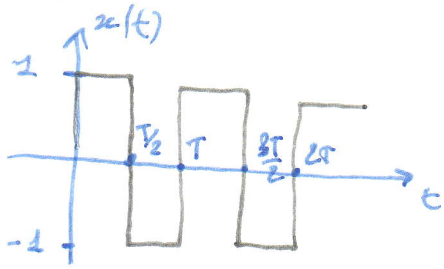
$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{2\pi j n \frac{t}{T}} \quad \text{et } c_0 = \frac{a_0}{2}$$

C'est la décomposition en série complexe d'un signal périodique.

Un signal périodique de période T est décomposable en série complexe :

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{2\pi j n \frac{t}{T}} \qquad \text{où } C_n = \frac{1}{T}\int_{(T)} x(t)\, e^{-2\pi j n \frac{t}{T}} dt$$

Exemple de calcul.



$$C_n = \frac{1}{T}\int_0^{T/2} e^{-2\pi j n \frac{t}{T}} dt - \frac{1}{T}\int_{T/2}^{T} e^{-2\pi j n \frac{t}{T}} dt$$

$$C_n = \frac{1}{T}\,\frac{\left[e^{-2\pi j n \frac{t}{T}}\right]_0^{T/2}}{\frac{-2\pi j n}{T}} - \frac{1}{T} \times \frac{\left[e^{-2\pi j n \frac{t}{T}}\right]_{T/2}^{T}}{\frac{-2\pi j n}{T}}$$

$$C_n = \frac{1}{T}\,\frac{e^{-\pi j n} - 1}{\frac{-2\pi j n}{T}} - \frac{1}{T}\,\frac{e^{-2\pi j n} - e^{-\pi j n}}{\frac{-2\pi j n}{T}}$$

- $e^{-\pi j n} = \cos(\pi n) - j\underbrace{\sin(\pi n)}_{=0}$

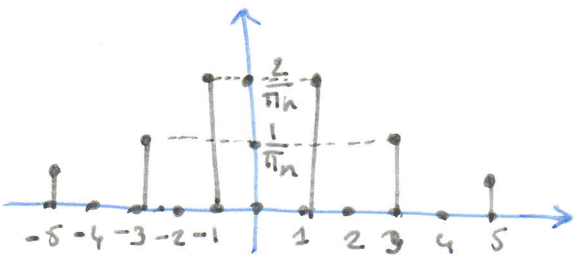
  $e^{-\pi n j} = (-1)^n$

- $e^{-2\pi j n} = \cos(2\pi n) - j\underbrace{\sin(2\pi n)}_{=0}$

  $e^{-2\pi j n} = 1$

$$C_n = \frac{(-1)^n - 1 - 1 + (-1)^n}{-2\pi j n} = \frac{2(-1)^n - 2}{-2\pi j n} = \frac{1-(-1)^n}{\pi j n}$$

$$\boxed{|C_n| = \frac{1-(-1)^n}{\pi n}}$$



Spectre de raies.

Calcul de la puissance moyenne

$$P_x = \frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T x(t).\Big(\underbrace{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{2\pi j n \frac{t}{T}}}_{=x(t)}\Big)dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(C_n . \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\, e^{2\pi j n \frac{t}{T}} dt\right)$$

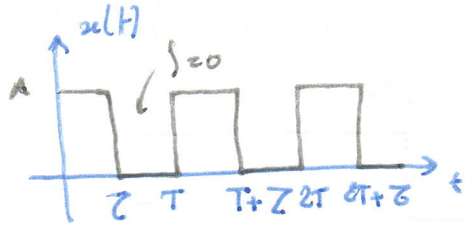
puissance moy — car périodique — inversion intégrale et somme.

$$P_x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n . C_{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n . C_n^* \iff \boxed{P_x = \frac{1}{T}\int_{(T)} x^2(t)\,dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |C_n|^2}$$

Théorème de Perseval

"La puissance moyenne d'un signal correspond à la somme des puissances moyennes des fréquences (= raies) qui l'a compose".

Exercice :



$$C_n = \frac{A}{T}\int_0^{\tau} e^{-2\pi j n \frac{t}{T}}\,dt = \frac{A}{T}\,\frac{\left[e^{-2\pi j n \frac{t}{T}}\right]_0^{\tau}}{\frac{-2\pi n j}{T}}$$

$$C_n = \frac{A}{T}\,\frac{e^{-2\pi j n \frac{\tau}{T}} - 1}{\frac{-2\pi j n}{T}} = \frac{A}{T}\,\frac{e^{-\pi j n \frac{\tau}{T}}\left(e^{-\pi j n \frac{\tau}{T}} - e^{\pi j n \frac{\tau}{T}}\right)}{\frac{-2\pi j n}{T}}$$

$$e^{-2jx} - 1 = e^{-jx}\left(e^{-jx} - e^{jx}\right)$$

$$\Rightarrow \cancel{\cos(x)} - j\sin(x) - \cancel{\cos(x)} - j\sin(x)$$

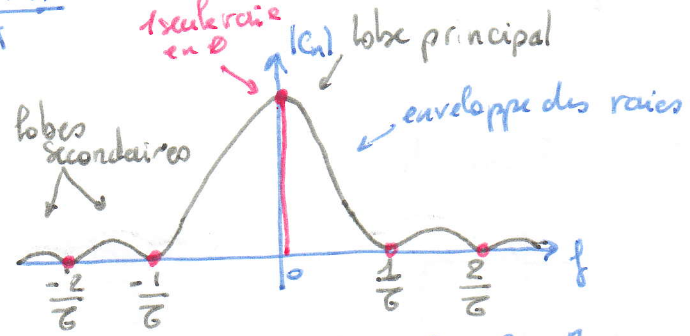
$$\Rightarrow -2j\sin(x)$$

$$C_n = \frac{A}{T} e^{-\pi j n \frac{\tau}{T}} \cdot \frac{-2j\sin\left(\pi n \frac{\tau}{T}\right)}{-2j\frac{\pi n}{T}}$$

$$C_n = \frac{A\tau}{T} e^{-\pi j n \frac{\tau}{T}} \cdot \mathrm{sinc}\left(\frac{\pi n \tau}{T}\right)$$

$$\mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

sinus cardinal



Tracé de $\mathrm{sinc}\left(\frac{\pi n \tau}{T}\right) = \mathrm{sinc}(\pi \tau f)$

$$|C_n| = \frac{A.\tau}{T}\left|\mathrm{sinc}(\pi \tau f)\right|$$

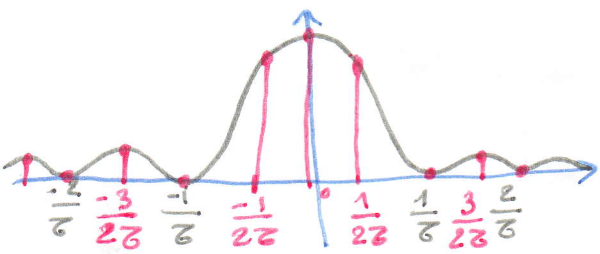
$$\mathrm{sinc}(x) = \frac{x - \cancel{\frac{x^3}{3}} + \cancel{o(3)}}{x} = 1$$

$$\mathrm{sinc}(x) = 0 \Rightarrow \frac{\sin(x)}{x} = 0 \Rightarrow x = k\pi$$

$$\mathrm{sinc}(\pi f \tau) = 0 \Rightarrow \frac{\sin(\pi f \tau)}{\pi f \tau} = 0 \Rightarrow$$

↑ Quand $T = \tau$ ↑ ⇔ une raie tous les $\frac{n}{\tau}$

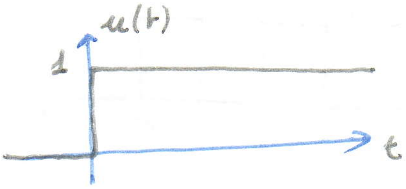
↓ Quand $T = 2\tau$ ⇔ une raie tous les $\frac{n}{2\tau}$



Le spectre de raies produit tend vers un spectre continu. La série de Fourier tend vers la transformée de Fourier.

2) Signaux non-périodiques

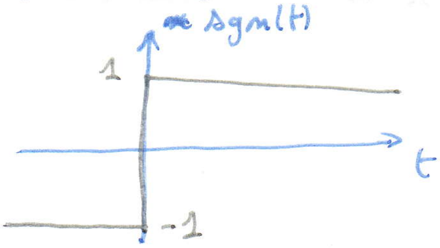
Fonction echelon unité : Heaviside



$$u(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } t > 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$ et arbitraire en 0

$x(t).u(t) = y(t) \leftarrow$ signal causal (i.e. nul pour $t > 0$)

Fonction sigma

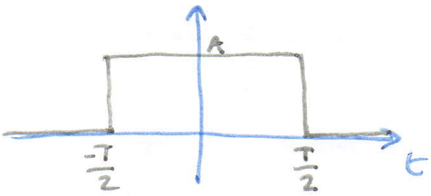


$$sgm(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } t > 0 \\ -1 \text{ si } t < 0 \\ \text{arbitraire en } 0 \end{cases}$$

Utilisé dans la modulation à bandes laterales uniques

$sgn(t) = 2u(t) - 1$

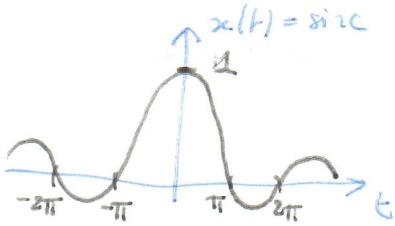
Fonction Rectangle



$$\frac{Rect(t)}{[T]} = \begin{cases} A \text{ si } |t| \leq T/2 \\ 0 \text{ si } |t| > T/2 \end{cases}$$

C'est une fonction troncature : elle permet de découper une portion d'un signal ∞

Fonction sinus-cardinal



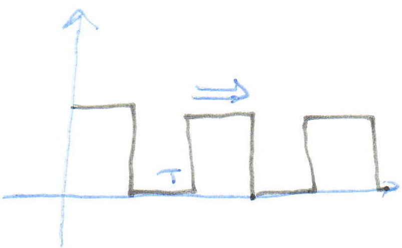
$sinc(t) = 0 \Longleftrightarrow t = k\pi$.

En TD nous allons montrer que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} sinc(t)\,dt = \pi.$$

La fonction sinc joue un role important dans la reconstitution du signal à partir de ses échantillons.

Transformée de Fourier



Lorsque $T \to \infty$, le signal periodique deviens apériodique. Dans ce cas, les raies du spectre se rapprochent

$T \to \infty$ alors $\begin{cases} \frac{1}{T} \to df \\ \frac{n}{T} \to f \\ \Sigma \to \int \end{cases}$

On sait que

- $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{2\pi j n \frac{t}{T}}$
- $C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-2\pi j n \frac{t}{T}} dt$

$C_n = \frac{1}{T} X\left(\frac{n}{T}\right)$

où $X\left(\frac{n}{T}\right) = \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-2\pi j \frac{nt}{T}} dt$

$$\boxed{X\left(\frac{n}{T}\right) \xrightarrow[T \to +\infty]{} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-2\pi j f t} dt} = X(f)$$

$X(f)$ est la transformée de Fourier direct de $x(t)$

Par ailleurs, on sait : $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} X\left(\frac{n}{T}\right) e^{2\pi j \frac{nt}{T}}$

$$\xrightarrow[T \to +\infty]{} \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\, e^{2\pi j f t}\, df = x(t)}$$

Transformée de Fourier inverse

Notation :
$X(f) = TF(x(t))$; $x(t) = TF^{-1}(X(f))$

Comme la série de Fourier, la TF $X(f)$ analyse $x(t)$ sous forme d'une infinité de composantes sinusoïdales.

Propriétés et Définitions.

Théorème de Parseval :

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2\, df}$$

$$\frac{1}{T}\int_{(T)} x^2(t)\, dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |C_n|^2$$

Démonstration

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot x(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} X(t)\, e^{2\pi j f t}\, df \right) dt$$

$$\cdots \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{2\pi j f t}\, dt \right)^* df \;\cdots\; \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\, X^*(f)\, df = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2\, df. \quad \text{CQFD.}$$

Propriété	Domaine temporel	Domaine fréquentiel.
Conjugué	$y(t) = x^*(t)$	$Y(f) = X^*(f)$
Multiplicat° par une constante	$y(t) = x(at)$	$Y(f) = \frac{1}{\lvert a \rvert} X(f/a)$
Translation temporelle	$y(t) = x(t - t_0)$	$Y(f) = e^{-2\pi j t_0} X(f)$
Translation fréquentielle	$y(t) = e^{2\pi f_0 j t} x(t)$	$Y(f) = X(f - f_0)$

Modulation d'amplitude $y(t) = x(t)\cos(2\pi f_0 t)$ $Y(f) = \frac{X(f-f_0) + X(X+f_0)}{2}$

Dérivée $y(t) = \frac{d^n}{dt^n} x(t)$ $Y(f) = (2\pi f j)^n X(f)$

Symetrie $y(t) = X(t)$ $Y(f) = x(-f)$

<u>Démonstration</u>

1°) $y(t) = x(t-t_0)$

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) e^{-2\pi j f t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-t_0) e^{-2\pi j f t} dt$$

<u>Changement de variable</u> : $u = t - t_0 \Rightarrow \begin{cases} du = dt \\ t = u + t_0 \end{cases}$

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) e^{-2\pi j f (u+t_0)} du = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) \cdot e^{-2\pi j f u} \cdot e^{-2\pi j f t_0} du$$

$$Y(f) = e^{-2\pi f t_0 j} \cdot X(f)$$

2°) $y(t) = e^{2\pi j f_0 t} \cdot x(t)$

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{2\pi j f_0 t} \cdot e^{-2\pi j f t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-2\pi j t (f - f_0)} dt$$

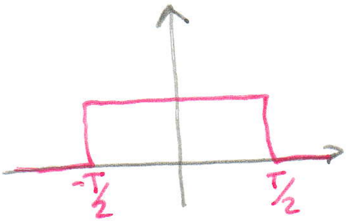
3°) $y(t) = x(t)\cos(2\pi f_0 t) = x(t) \cdot \frac{e^{2\pi j f_0 t} + e^{-2\pi j f_0 t}}{2} = \frac{1}{2}\left(X(f-f_0) + X(f+f_0)\right)$

4°) $X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-2\pi j f t} dt \Rightarrow x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{2\pi j f t} df$

$y(t) = X(t) \xrightarrow{TF} Y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(t) e^{-2\pi j f t} dt$

$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(u) e^{2\pi j u t} du$ et $Y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(u) e^{-2\pi j f u} du.$

Quelques exemples de TF



$$x(t) = A.\frac{rect(t)}{[T]}$$

$$X(f) = \int_{-T/2}^{T/2} A.e^{-2\pi j f t}\,dt = A\frac{\left[e^{-2\pi j f t}\right]_{-T/2}^{T/2}}{-2\pi j f} = A.\frac{e^{-\pi j f T} - e^{\pi j f T}}{-2\pi j f}$$

$$X(f) = A.T\frac{\cancel{-2}j\sin(\pi f T)}{\cancel{-2}\pi j f T} = A.T.\frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T} = A.T\,sinc(\pi f T)$$

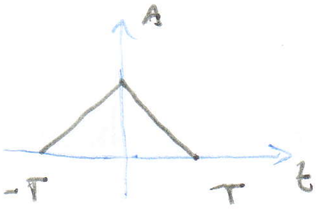
$\pi f T = k\pi$

$f = \frac{k}{T}$

!! ⚠ Méthode : Ampli x Largeur x sinc (π f largeur)

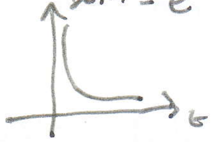
Exercice :

$$x(t) = A.\frac{tri(t)}{[2T]} \qquad X(f) = A.T\,sinc^2(\pi f T)$$



Exponentielle décroissante

$x(t) = e^{-at}.u(t)$



$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at}u(t).e^{-2\pi j f t}\,dt$$

$$X(f) = \int_{0}^{+\infty} e^{-t(a+2\pi j f t)}\,dt$$

$$X(f) = \frac{\left[e^{-t(a+2\pi f)}\right]_0^{+\infty}}{-(a+2\pi f j)} = \frac{1}{a+2\pi f j}$$

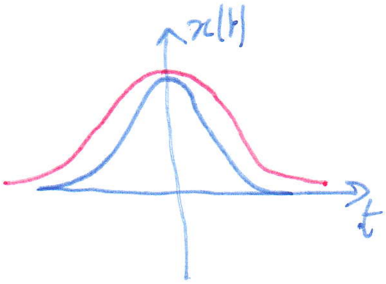
Exercice : $x(t) = e^{-a|t|}$

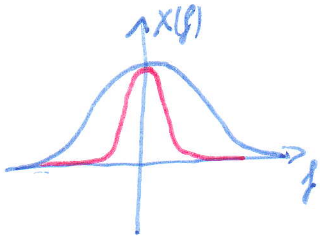
$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|t|}.e^{-2\pi j f t}\,dt = \int_{-\infty}^{0} \underbrace{e^{at}.e^{-2\pi j f t}}_{e^{t(a-2\pi j f t)}}\,dt + \int_{0}^{+\infty} \underbrace{e^{-at}.e^{-2\pi j f t}}_{e^{-t(a+2\pi j f t)}}\,dt$$

$$X(f) = \frac{\left[e^{t(a-2\pi j f)}\right]_{-\infty}^{0}}{a-2\pi j f} + \frac{\left[e^{-t(a+2\pi j f)}\right]_{0}^{+\infty}}{a+2\pi j f} = \frac{1}{a-2\pi j f} + \frac{1}{a+2\pi j f} = \frac{2a}{a^2+4\pi^2 f^2}$$

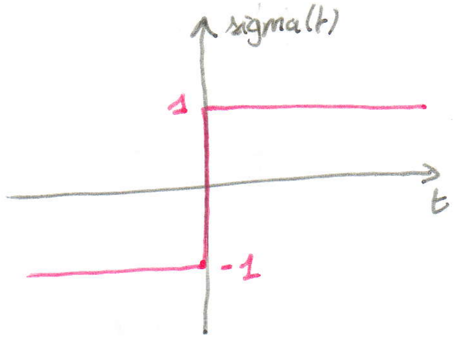
Fonction Gaussienne :

$$x(t) = e^{-at^2} \Rightarrow X(f) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.e^{-\pi^2\frac{f^2}{a^2}}$$

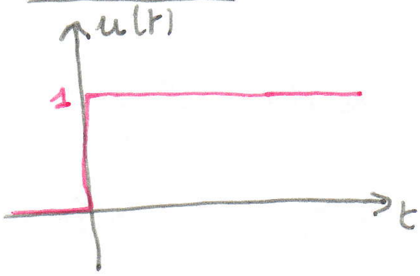




TF de la fonction sigma



TF de $u(t)$



/ Transformée de Fourier d'un produit

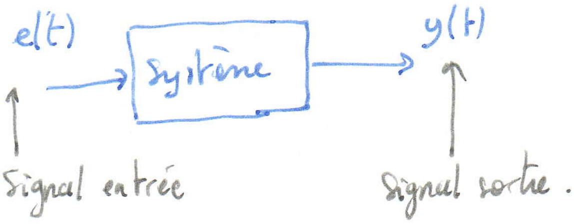
Fonction essentielle dans l'étude des systèmes.

$$z(t) = x(t) * y(t)$$

↑ Convolution

$$z(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau).y(t-\tau)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} y(\tau).x(t-\tau)\,dt$$

On appelle système, un algorithme, un carte électronique et tout ce qui transforme un signal en entrée.

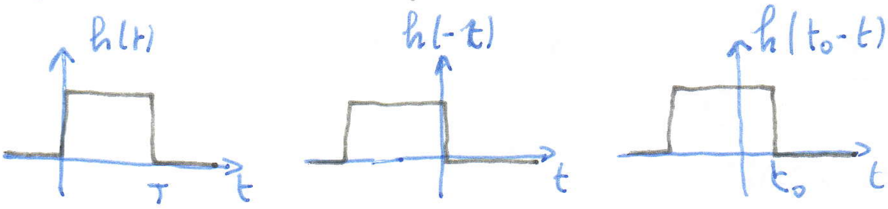


Fonction de Transfert : $H(f) = \dfrac{S(f)}{E(f)} \xrightarrow{TF^{-1}} h(t)$

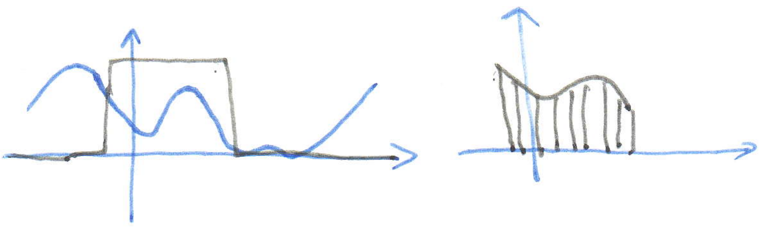
$y(t) = e(t) * h(t)$ $*$: Convolution

$\rightarrow Y(f) = E(f).H(f)$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e(\tau).\,h(t-\tau)\,d\tau$$



$h(t_0-t).e(t)$



/ Transformée de Fourier d'un produit de convolution

$$\boxed{TF\,(x(t) * y(t)) = X(f) \cdot Y(f)}$$

Démonstration :

$$z(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x(t) * y(t))\, e^{-2\pi j f t}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) y(t-\tau)\, d\tau \right) e^{-2\pi j f t}\, dt$$

$$z(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} y(t-\tau)\, e^{-2\pi j f t}\, dt \right)}_{Y(f) e^{-2\pi j f \tau}} d\tau = Y(f) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) e^{-2\pi j f \tau}\, d\tau$$

$$z(t) = Y(f) \cdot X(f)$$

/ Transformée de Fourier d'un produit simple.

$$TF\,(x(t) \cdot y(t)) = X(f) * Y(f)$$

$$* \xrightarrow{TF} \cdot$$
$$\cdot \xrightarrow{TF} *$$

/ Définition de l'impulsion de Dirac (appelée aussi distribution delta)

C'est un opérateur mathématique qui manipule des fonctions. Cet opérateur il définit un instant t_0. Il donne la valeur de la fonction auquel il est appliqué en t_0

$$\langle x(t), \underset{\underset{\text{Dirac}}{\uparrow}}{\delta(t-t_0)} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, \delta(t-t_0)\, dt = x(t_0)$$

C'est un opérateur d'échantillonnage.

Cas particulier :

$x(t) = 1$: $\langle x(t), \delta(t) \rangle = \int x(t) \cdot \delta(t)\, dt = x(0)$

Dirac déf en 0

$\Downarrow$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, dt = 1$$

- $\delta(t)$ est défini en 0
- On sait $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, dt = 1$.
- On peut écrire $\int_{-\infty}^{t} \delta(t)\, dt = \begin{cases} 1 \text{ si } t > 0 \\ 0 \text{ si } t < 0 \\ 1/2 \text{ si } t = 0 \text{ arbitrairement} \end{cases}$
- Cela permet d'admettre :

$$\boxed{\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}}$$