Métrologie et Capteurs

Rémi Maubanc aka *Hyperion*

2 Novembre 2020

1 Chapitre 1

$\Longrightarrow$ Signal de mesure (tension, courant, charge) noté s $\Longrightarrow$ Voir moodle (chapitre 1)

2 Caractéristique métrologique des capteurs

2.1 Relation entre le mesurande et le signal de mesure

$s = f(m)$; Caractéristique du capteur : courbe caractéristique de f

Exemple : Caractéristique d'un potentiomètre

Si grandeur d'influence : $s = f(m, \{g\})$ Si mesurande varie dans le temps, $m(t)$:

1. Si la tranduction suit parfaitement l'évolution de $m(t)$ à un retard constant près
   $\Longrightarrow$ s est une fonction implicite de t : s ne dépend de t qu'à travers m.
   $\longrightarrow s(t) = f(m(t), \{g\})$

2. Si distortion de phase et distortion d'amplitude $\longrightarrow$ s devient une fonction explicite de t : $s(t) = f(m(t), t, \{g\})$

2.2 La sensibilité

2.2.1 Définition générale

La sensibilité $S(m_0) = \left.\frac{ds}{dm}\right|_{m_0}$ où S fournie par la constructeur dans la documentation

On ne connait pas l'équation , mais on dispose d'un ensemble de couple (m_0, s_0) permettant d'approcher les caractéristiques : $S(m_0) = \left.\frac{\Delta s}{\Delta m}\right|_{m_0}$

Définition : Une variable aléatoire réelle est une application mesurable de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{C}, \mathcal{P})$ dans $\mathbb{R}$ muni de sa tribu Borélienne.

$\mathbb{B}$: la σ algèbre (Borélienne) engendrée par les intervalles de $\mathbb{R}$.

$\forall B \in \mathbb{B}$ (B : borélien)

$X : (\Omega, \mathcal{C}, \mathcal{P}) \mapsto (\mathbb{R}, \mathbb{B})$

$\mathcal{P}_X(B) = \mathcal{P}(\{\omega \in \Omega / X(\omega) \in B\})$

La tribu $(\mathcal{C})$ est la classe d'évènements (l'ensemble de tous les évènements).

(i) $\forall A \in \mathcal{C}, \overline{A} \in \mathcal{C}$

(ii) Soit $(A_i)_{i \in I}$ famille dénombrable d'évènements.

$\bigcup\limits_{i \in I} A_i \in \mathcal{C}(A_i \in \mathcal{C})$ (i, ii) $\varnothing \in \mathcal{C}, \Omega \in \mathcal{C}$

La σ algèbre est la plus petite tribu engendrée par les intervalles de $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_X(B) &= \mathcal{P}(\{\omega / X(\omega) \in B\}) \\ &= \mathcal{P}(\{X^{-1}(B)\}) \rightarrow \textit{image reciproque} \end{aligned}$$

Définition : La fonction de répartition de X est l'application $F : \mathbb{R} \mapsto [0, 1]$

$F(x) = \mathcal{P}(X < x)$

F est une fonction croissante et $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$

Définition : On dit qu'une variable aléatoire X est à densité lorsque sa fonction de répartition F est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ privé d'un nombre fini de points.

Toute fonction f à valeurs positives qui ne diffère de la dérivée F' qu'en un nombre fini de points est appelé densité de X.

$F'(x) = f(x)\ sur$ $\mathbb{R}$ privé de certains points. Théorème : Soit X une v.a. réelle à densité de fonction de répartition F. Si f est une densité de X alors $\forall x \in \mathbb{R} \ \ F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$

Démonstration : Soient $a_1, a_2, ..., a_n$ les points en lesquels la primitive n'est pas définie. Supposons que $a_1 < a_2 < ... < a_n$

1^{er} cas : $X < a_i$

F est une primitive de f sur $]-\infty, x]$ et $\underset{t\to-\infty}{lim} f(t) = 0$

$\int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \big[F(t)\big]_{-\infty}^{x} = F(x)$

$2^e cas :$ $a_p \leq X \leq a_{p+1}$, $p \in [[1, n]]$

F est une primitive de f sur chaque interval $]a_b, a_{b+1}[$, $b \in [[0, p]]$ et donc sur $]a_p, x[$

$\forall k \in [[1, p-1]]$

$$\begin{array}{rcl} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)dt &=& \underset{t\to a_{k+1}}{lim} F(t) - \underset{t\to a_k}{lim} F(t) \\ &=& F(a_{k+1}) - F(a_k) \\ \int_{a_0}^{a_1} f(t)dt &=& \int_{-\infty}^{a_1} f(t)dt = \big[F(t)\big]_{-\infty}^{a_1} \\ &=& \underset{t\to a_i}{lim} F(t) - \underset{=0}{F(-\infty)} = F(a_1) \end{array}$$

$\int_{a_p}^{x} f(t)dt = F(x) - F(a_p)$

$$\begin{array}{rcl} \int_{-\infty}^{x} f(t)dt &=& \sum_{k=0}^{p-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)dt + \int_{a_k}^{x} f(t)dt \\ &=& F(a_1) + \sum_{k=1}^{p-1}(F(a_{k+1}) - F(a_k)) + F(x) - F(a_p) \\ &=& F(x)\ (simplification\ des\ termes) \\ \int_{-\infty}^{x} f(t)dt &=& F(x) \end{array}$$

Conséquences : $f(x)$ continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points.

(i) $F'(x) = f(x) \geq 0$ car F croissante.

(ii) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$

Une densité est caractérisée par deux points :

- positive
- son intégrale = 1

Exemple 1 :

$$f(x) = \begin{cases} cos(x) \ si \ x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ 0 \ sinon \end{cases}$$

1) Vérifier que $f(x)$ est une densité

2) Soit X une v.a. de densité $f(x)$: déterminez la fonction de répartition de X (fonction de répartition)

1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos(t)dt = \left[sin(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = sin(\frac{\pi}{2}) - sin(0) = 1$

2) $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$

1er cas : $x \in]-\infty, 0]$ – $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = 0$

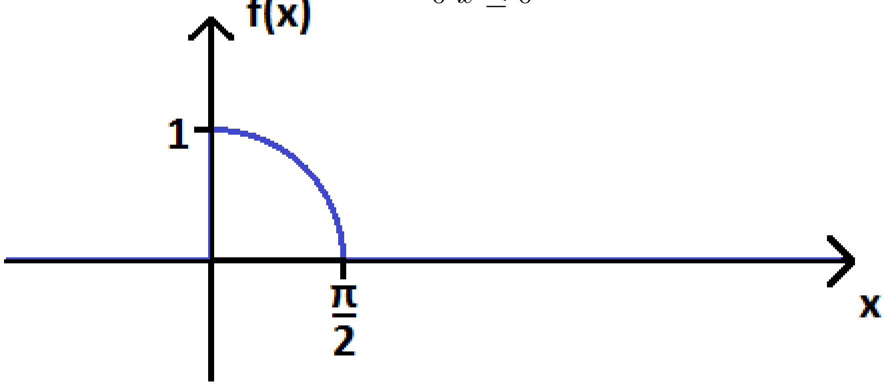
2^{e} cas : $x \in]0, \frac{\pi}{2}]$

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^{0} f(t)dt + \int_0^x f(t)dt \\ &= 0 + \int_0^x cos(t)dt = sin(x) \end{aligned}$$

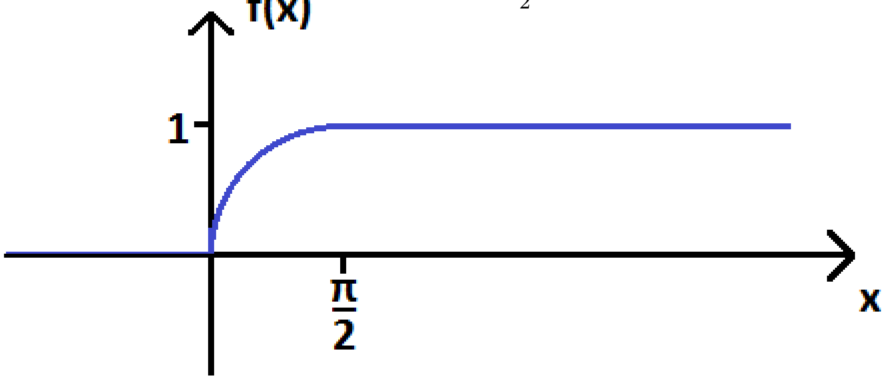
3^{e} cas : $e > \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} f(t)dt \\ &= 0 + 0 + 1 + 0 \end{aligned}$$

$0 \ x \leq 0$



$1\ 1 > \frac{\pi}{2}$



$F(x) = sin(x)\ 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

Exemple 2 : X une v.a. de densité f. Soit F sa fonction de répartition.

$Y = \Phi = aX + b$ - $a \neq 0$

Déterminez la loi de Y.

Soit $G(x)$ la fonction de répartition de Y : $G(X) = \mathcal{P}(Y < x)$

$$\begin{array}{lll} Pour\ a > 0 \quad G(x) & = & \mathcal{P}(aX + b < x) = \mathcal{P}(X \leq \frac{x-b}{a}) = F(\frac{a-b}{a} = F(\frac{x-b}{a}) \\ Pour\ a < 0 \quad G(x) & = & \mathcal{P}(X > \frac{x-b}{a}) = 1 - \mathcal{P}(X \leq \frac{x-b}{a}) = 1 - F(\frac{x-b}{a}) \end{array}$$

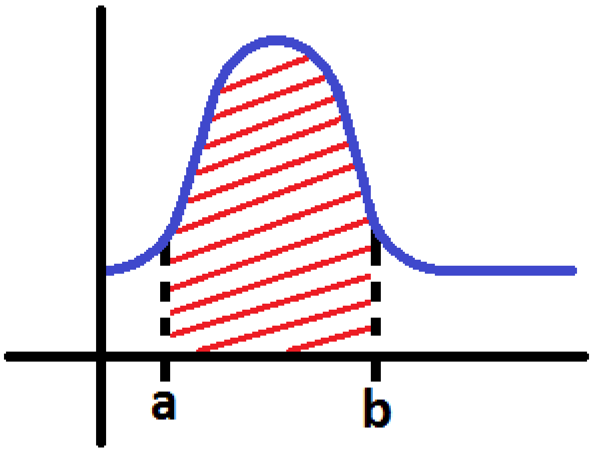
Remarque : $\mathcal{P}(X = a) = 0$

$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$

Si $a = b$ $\mathcal{P}(X = a) = 0$

$F(x) = \mathcal{P}(X < a) = \mathcal{P}(X \leq a)$

La densité de ϕ et $g(x) = G'(x)$



$$g(x) = G'(x) = \begin{cases} \frac{1}{a} f(\frac{x-b}{a}) \mid a > 0 \\ \frac{-1}{a} f(\frac{x-b}{a} \mid a < 0 \end{cases}$$

$g(x) = \frac{1}{|a|} f(\frac{x-b}{a})$

2.3 Moments d'une v.a. continue

2.3.1 Espérence mathématiques

Définition : Soit X une v.a. continue de densité $f(x)$. On appelle espérence de X : $E(X) = \int_{\mathbb{R}} xf(x)dx$ si l'intégrale ω (?)

Remarque : E est linéaire.

$E(\alpha X + \beta Y) = \alpha E(X) + \beta E(Y)$ – $\forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

Définition : $E(\phi(X)) = \int_{\mathbb{R}} \phi(x)f(x)dx \rightarrow$ densité de λ (ϕ quelconque)

Exemple : (Loi de Cauchy)

Sa densité :

$$\underset{\forall x \in \mathbb{R}}{f(x)} = \frac{1}{\pi(1 + x^2}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\pi(1 + x^2} dx$$

$\frac{x}{1+x^2} \approx \frac{1}{x}$ au voisinage de $+\infty$. Or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}dx$ divergente d'après Riemann avec $\alpha = 1$.

L'espérence de Cauchy n'existe pas.

2.3.2 Variance de X

Définition : $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ où $E(X^2) = \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x)dx$

3 Exercices

3.1 Exercice 1

Soit $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}\ \forall x \in \mathbb{R}$

1. Montrer que $f(x)$ est une densité de probabilité.

2. Soit X la VA de densite $f(x)$. Déterminer la fonction de repartition de X.

3. Calculer $E(X)$ et $V(X)$

$$\textbf{1)}\ f\ est\ une\ densite\ ssi\ :\ \begin{cases} (i) & f(x) \geq 0 \\ (ii) & \int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1 \end{cases}$$

$$(i)\quad f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|} > 0\ \ \forall x \in \mathbb{R}$$

$$(ii)\quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2}e^{-|x|}dx \underset{car\ f\ paire}{\Rightarrow} \frac{2}{2}\int_{0}^{+\infty} e^{-x}dx = \big[-e^{-x}\big]_{0}^{+\infty} = 1$$

2) $F(x) = \mathcal{P}(X < x) = \int_{-x}^{x} f(t)dt\ \forall x \in \mathbb{R}$ fonction de répartition de X

<u>1^er cas :</u>

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{2}e^{t}dt = \frac{1}{2}\big[e^{t}\big]_{-\infty}^{x} = \frac{1}{2}e^{x}$$

<u>2^e cas :</u>

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \underset{Relation\ de\ Chasles}{=} \int_{-\infty}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{x} f(t)dt$$

$$\left(Via\ 1er\ cas\ \Rightarrow \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \frac{1}{2}e^{x} \Rightarrow \int_{-\infty}^{0} f(t)dt = \frac{1}{2}e^{0} = \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \int_{0}^{x} \frac{1}{2}e^{-t}dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\big[-e^{-t}\big]_{0}^{x} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} * e^{-x} + \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} * e^{-x} = F(x)$$

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{x} & x \leq 0 \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-x} & x > 0 \end{cases} \quad F(x)\ est\ continue\ sur\ \big]-\infty;0\big[\cup\big]0;+\infty\big[$$

$$En\ 0\ :\ \lim_{x\to 0^+} F(x) = \frac{1}{2} = \lim_{x\to 0^-} F(x) = F(0) \Rightarrow F\ continue\ sur\ \mathbb{R}$$

3)

$$E(X) = \int_{\mathbb{R}} xf(x)dx. \;\; V(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx$$

Pourquoi $f(x)$ et pas $f(x^2)$? Def: $E(\phi(X)) = \int_{\mathbb{R}} \phi(x)f(x)dx$

$$E(X) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{xe^{-|x|}}_{impaire}dx \Rightarrow E(X) = 0$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{x^2 e^{-|x|}}_{paire}dx = \frac{2}{2}\int_{0}^{+\infty} x^2 e^{-x}dx = \int_{0}^{+\infty} \underbrace{x^2}_{v} * \underbrace{e^{-x}}_{u'}dx$$

$$IPP: \begin{array}{ll} v = x^2 & v' = 2x \\ u = -e^{-x} & u' = e^{-x} \end{array} \quad E(X^2) = \underbrace{\Big[-x^2e^{-x}\Big]_0^{+\infty}}_{\underset{x\mapsto+\infty}{\longrightarrow} 0} - \int_0^{+\infty} -2x * e^{-x}dx$$

$$E(X^2) = 2\int_{0}^{+\infty} e^{-x}dx = 2\big[-e^{-x}\big]_0^{+\infty} = 2$$

$$V(X) = E(X^2) - \underbrace{E^2(X)}_{=0} = 2$$

3.2 Exercice 2

Le fonctionnement d'une machine est pertubée par des pannes. On considère 3 variables aléatoires : $X_i (i = 1, 2, 3)$.

X_1 **:** temps ,exprimé en heures, écoulé entre la mise en route de la machine et la 1$^{\text{ère}}$ panne.

X_2 **:** temps, exprimé en heures, écoulé entre la remise en route de la machine et la 1$^{\text{ère}}$ panne et la suivante.

X_3 **:** temps, exprimé en heures, écoulé entre la remise en route de la machine et la 2$^{\text{e}}$ panne et la suivante.

Après la 3$^{\text{e}}$ panne, la machine est suspendue (X_i) sont indépendantes et suivant la même loi de densité $f(t) = 0$ si $t < 0$ et $f(t) = \frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}}$ si $t \geq 0$

1. Quelle est la durée moyenne de fonctionnement entre les deux pannes consécutives ?

2. Soit E : "*chacune des trois périodes de fonctionnement dure plus de 2h*". Calculer $\mathcal{P}(E)$.

3. Soit Y V.A. : la plus grande des trois durées de fonctionnement. Calculer $\mathcal{P}(Y \leq t)$ $\forall t \in \mathbb{R}$

4. Déterminer une densité de Y.

5. Calculer $I = \int_0^{+\infty} te^{at}dt$ $\forall a \in \mathbb{R}^*$. En déduire E(Y).

1) La durée moyenne de fonctionnement entre 2 pannes consécutives.

$$E(X_i) = \int_{\mathbb{R}} tf(t)dt = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \underbrace{t}_{v}\, \underbrace{e^{-\frac{t}{2}}}_{u'}dt = \frac{1}{2}\big[\underbrace{-2te^{-\frac{t}{2}}}_{\xrightarrow[t\to+\infty]{}0}\big]_0^{+\infty} - \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}(-2e^{-\frac{t}{2}})dt$$

$$E(X_i) = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{2}}dt = \big[-2e^{-\frac{t}{2}}\big] = 2$$

2) On cherche $\mathcal{P}(E)$

$$E = \bigcap_{i=1}^{3} (X_i \geq 2); \mathcal{P}(E) = \prod_{i=1}^{3} \mathcal{P}(X_i \geq 2)$$

$$\mathcal{P}(X_i \geq 2) = \int_2^{+\infty} f(t)dt = \int_2^{+\infty} \frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}}dt = -\big[e^{-\frac{t}{2}}dt\big]_2^{+\infty} = \frac{1}{2}(2e^{-\frac{2}{2}}) = e^{-1}$$

$$\mathcal{P}(E) = \big(e^{-1}\big)^3 = e^{-3}$$

3) $Y = \underset{1\leq i\leq 3}{Max} X_i$

$$\underset{\forall t\in\mathbb{R}}{\mathcal{P}(Y \geq t)} = \mathcal{P}(MaxX_i \leq t) = \mathcal{P}(X_i \leq t \quad \forall i) = \mathcal{P}(\bigcap_{i=1}^{3} (X_i \leq t))$$

$$\mathcal{P}(Y \leq t) = \prod_{i=1}^{3} \mathcal{P}(X_i \leq t)\ ;\ \mathcal{P}(X_i \leq t) = F_{X_i}(t)\ fonction\ de\ repartition\ de\ X_i$$

<u>1^{er} cas :</u> $t < 0$

$$F_{X_i}(t) = \int_{-\infty}^{t} f(u)du = 0$$

<u>2^2 cas :</u> $t \geq 0$

$$F_{X_i}(t) = \int_0^t \frac{1}{2}\, e^{-\frac{u}{2}}du = \frac{1}{2}\big[-2e^{-\frac{u}{2}}\big]_0^t = 1 - e^{-\frac{t}{2}}$$

$$F_{X_i} = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 - e^{-\frac{t}{2}} & t \geq 0 \end{cases}$$

$$f_Y(t) = \mathcal{P}(Y \geq t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{3}{2}\ e^2\big(1 - e^{-\frac{t}{2}}\big)^2 & t \geq 0 \end{cases}$$

4) Une densité de Y.

$$f_Y(t) = F_Y(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{2}{3} e^2\big(1 - e^{-\frac{t}{2}}\big)^2 & t \leq 0 \end{cases}$$

5)

$$\int_0^{+\infty} \underset{v}{t}\ \underset{u'}{e^{\alpha t}} dt \quad \alpha < 0 \begin{cases} v = t & \Rightarrow \quad v' = 1 \\ u' = e^{\alpha t} & \Leftarrow \quad u = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha t} \end{cases}$$

$$I = [\ \underset{\underset{t \to +\infty}{\longrightarrow 0}}{\frac{t}{\alpha}}\ ]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{1}{\alpha} e^{\alpha t} dt = \frac{1}{\alpha}[\frac{e^{\alpha t}}{\alpha}]_0^{+\infty} = \frac{1}{\alpha^2}$$

$$La\ densite\ Y\ \ f_Y(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ \frac{3}{2} e^{-\frac{t}{2}}\big(1 - e^{-\frac{t}{2}}\big)^2 & t > 0 \end{cases}$$

$$E(Y) = \int_{\mathbb{R}} t f_Y(t) dt = \frac{3}{2} \int_0^{+\infty} t e^{-\frac{t}{2}}\big(1 - e^{-\frac{t}{2}}\big)^2 dt$$

On cherche à retrouver l'intégrale de la question 5)

$$E(Y) = \frac{3}{2} \int_0^{+\infty} t e^{-\frac{t}{2}}(1 - 2e^{-\frac{t}{2}} + e^{-t}) dt = \frac{3}{2}\Big(\int_0^{+\infty} t e^{-\frac{t}{2}} dt - 2 \int_0^{+\infty} t e^{-t} dt + \int_0^{+\infty} t e^{-\frac{3}{2}t} dt \Big)$$

$$E(Y) = \frac{3}{2}\Big(\frac{1}{1/4} - 2\frac{1}{(-1)^2} + \frac{1}{9/4}\Big) = \frac{3}{2}(2 + \frac{4}{9}) = \frac{11}{3} h = 3h40m$$

3.3 Exercice 3

La durée de fonctionnement, exprimé en jours, d'un certain composant électronique est une VA X dont la densité est : $f(x) = 0$ où $x < 0$ et $f(x) = \beta x^2 e^{-\alpha x}$ où $x \geq 0$ et $\alpha > 0$.

1. Calculer β en fonction de α.
2. Sachant qu'un tel composant fonctionne en moyenne pendant 200 jours. Calculer α.
3. Déterminer une densité de Y où $Y = \sqrt{X}$.

$$\mathbf{1)}\ f\ est\ une\ densite\ ssi\ :\ \begin{array}{ll} (i) & f(x)\geq 0 \ \Rightarrow\ \beta\geq 0 \\ (ii) & \int_{\mathbb{R}} f(x)dx=1 \end{array}$$

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx=1\Rightarrow\beta\int_0^{+\infty} x^2\ e^{-\alpha x}dx=\big[-\frac{1}{\alpha}x^2e^{-\alpha x}\big]_0^{+\infty}+\frac{2}{\alpha}\int_0^{+\infty} xe^{-\alpha x}dx$$

$$Soit\ I=\int_0^{+\infty}\underbrace{x^2}_{v}\ \underbrace{e^{-\alpha x}}_{u'}dx=\frac{2}{\alpha}\Big(\big[-\underbrace{\frac{x}{\alpha}}_{\longrightarrow 0}\ e^{-\alpha x}\ \big]_0^{+\infty}+\frac{1}{\alpha}\ \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}dx\Big)$$

$$I=\frac{2}{\alpha^2}\big[\frac{-1}{\alpha}e^{-\alpha x}\big]_0^{+\infty}=\frac{2}{\alpha^3}\ \mid\ I*\beta=1\Rightarrow\beta=\frac{\alpha^3}{2}$$

$$\mathbf{2)}\ E(X)=200j=\beta\int_0^{+\infty}\underbrace{x^3}_{v}\ \underbrace{e^{-\alpha x}}_{u'}dx=\beta\Big(\big[-\frac{x^3}{\alpha}e^{-\alpha x}\big]_0^{+\infty}+\frac{3}{\alpha}\int_0^{+\infty} x^2e^{-\alpha x}dx\Big)=\frac{3}{\alpha}\beta I.$$

$E(X)=\frac{3}{\alpha}\beta I$ où $\beta I=1\Rightarrow 200j=\frac{3}{\alpha}\Rightarrow\alpha=\frac{3}{200}$ **3)** $Y=\sqrt{X}$. La fonction de répartition de Y : $F_Y(x)=\mathcal{P}(Y<x)$

$$F_Y(x)=\mathcal{P}(\sqrt{X}<x)=\left\{\begin{array}{rr} 0 & x<0 \\ \mathcal{P}(X<x^2)=F_X(x^2) & x\geq 0 \end{array}\right\}=\left\{\begin{array}{rr} 0 & x<0 \\ \alpha^3x^5e^{-\alpha x} & x\geq 0 \end{array}\right\}$$

$$F_Y(x)=\left\{\begin{array}{rr} 0 & x<0 \\ 2xf(x^2) & x\leq 0 \end{array}\right.$$

$$F_Y(x)=2x\beta x^4e^{-\alpha x^2}=\alpha^2x^5e^{-\alpha x^2}\ \mid\ x\geq 0$$

3) Lois usuelles continues

a) Loi uniforme sur un intervalle $[a,b]$

Une V.A. X suit la loi uniforme sur $[a,b]$ lorsque X admet pour densité :

$$f(x)=\left\{\begin{array}{lll} \frac{1}{b-a} & si & x\in[a,b] \\ 0 & sinon & \end{array}\right.\quad X\ suit\ U_{[a,b]}$$

$$E(X)=\int_{\mathbb{R}} xf(x)dx=\int_a^b x\frac{1}{b-a}dx\Rightarrow E(X)=\frac{b+a}{2}$$

$$V(X)=E(X^2)-E^2(X)$$

$$E(X^2)=\int_{\mathbb{R}} x^2f(x)dx=\int_a^b x^2\frac{1}{b-a}dx=\frac{1}{3}\Big(\frac{b^3-a^3}{b-a}\Big)$$

$$V(X)=\frac{(b-a)^2}{12}$$

b) Loi exponentielle de paramètre λ ($\lambda > 0$)

Une V.A. X suit la loi exponentielle si sa densité est $f(x) = 0$ si $x < 0$ et $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ si $x \geq 0$.

$$E(X) = \int_0^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x} dx = \big[\underbrace{-xe^{-\lambda x}}_{\longrightarrow 0}\big]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx = \big[-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\big]_0^{+\infty} = \frac{1}{\lambda}$$

$$E(X^2) = \int_0^{+\infty} x^2\lambda e^{-\lambda x} dx = \big[\underbrace{-x^2 e^{-\lambda x}}_{\longrightarrow 0}\big]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} xe^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda}E(X)$$

$$V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$\textit{Remarque} \ : \ \forall (s,t) \in \mathbb{R}_+^2 \ : \ \mathcal{P}_{X>s}(X \geq s+t) = \mathcal{P}(X > t)$$

$$\mathcal{P}(X > t) = \frac{\mathcal{P}((X \geq s+t) \cap (X > s))}{\mathcal{P}(X > s)} = \frac{\mathcal{P}(X \geq s+t)}{\mathcal{P}(X > s)}$$

On dit que la loi exponentielle n'a pas de mémoire.

c) Loi gamma de paramètre $r(r > 0)$

Définition : On dit qu'une V.A. X positive suit une loi gamma de paramètre $r > 0$ notée γ_r si sa densité $f(x) = \frac{1}{\Gamma(r)}e^{-x}.x^{r-1}$ où $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}.t^{x-1}dt$ (Fonction Gamma)

Propriété de $\Gamma(x)$:

$$\begin{array}{llll}
(1) & \Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \quad \forall x > 0 & (3) & \Gamma(n+1) = n! \\
(2) & \Gamma(1) = 1 & (4) & \Gamma(k+\frac{1}{2}) = \frac{1.3.5...(2k-1)}{2k}.\Gamma(\frac{1}{2}) \\
(5) & \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi} & &
\end{array}$$

Démonstration :

$$\begin{array}{ll}
(1) & \Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}.t^x.dt = \big[-e^{-t}.t^x\big]_0^{+\infty} + x\int_0^{+\infty} e^{-t}.t^{x-1}.dx = x\Gamma(x) \\
(2) & \Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}.dt = \big[-e^{-t}\big]_0^{+\infty} = 1 \\
(3) & \Gamma(n+1) \underset{(1)}{=} n\Gamma(n) = n.(n-1).\Gamma(n-1) = n.(n-1).(n-2)...1.\underbrace{\Gamma(1)}_{=1} = n! \\
(4) & \Gamma(k+\frac{1}{2}) = \mathcal{P}(1+k-\frac{1}{2}) = (k-\frac{1}{2})\mathcal{P}(k-\frac{1}{2}) = \frac{(2k-1)}{2}\mathcal{P}(k-\frac{1}{2}) \\
 & \Gamma(k+\frac{1}{2}) = \frac{(2k-1)(2k-3)}{2.2}.\Gamma(k-\frac{3}{2}) = \frac{(2k-1)(2k-3)(2k-5)...5.3.1.\Gamma(\frac{1}{2})}{2^k} \\
(5) & \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi} \ (\textit{demo voir la loi Normale})
\end{array}$$

$E(X) = r$ et $V(X) = r$.

Cours 3/4/19

4 Convergence en probabilité

4.1 Définition

(X_n) une suite de variables aléatoires réelles. On dit que (X_n) converge en probabilité vers une variable aléatoire X lorsque $\forall \epsilon > 0$

$$\underset{n \to +\infty}{lim} \mathcal{P}\Big(\big|X_n - X\big| \geq \epsilon\Big) = 0$$

4.2 Notation

$$X_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{P}} X$$

4.3 Remarque

Si $E(X_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} a$ et $V(X_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ alors $X_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{P}} a$
Il suffit d'utiliser l'inégalité de Tchehychev :

$$\forall \epsilon > 0 \;\; \mathcal{P}\Big(\big|X_n - E(X_n)\big| \geq \epsilon\Big) \leq \frac{V(X_n)}{\epsilon^2}$$

En passant à la limite :

$E(X_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} a$ et $V(X_n)$

5 Convergence en loi

5.1 Définition

(X_n) une suite de variables aléatoires de fonction de répartition $F_{X_n}(x)$ et X une V.A. de fonction de répartition $F_X(x)$

On dit que X_n converge en loi vers X ss $\forall x \in \mathbb{R}$

(x point de continuité de $F_X(x)$)

$$\underset{n \to +\infty}{lim} F_{X_n}(x) = F_X(x)$$

5.2 Notation

$$X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} X$$

5.3 Théorème (Central-limite)

(X_n) une suite de V.A. indépendante et de même loi, d'espérence m et d'écart-type σ.

Soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ alors on a : $\frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} \mathcal{N}(0,1)$

5.4 Remarque

$$E(S_n) = \sum_{k=1}^{n} E(X_k) = \sum_{k=1}^{n} m = n.m$$

$$V(S_n) = \sum_{k=1}^{n} V(X_k) = \sum_{k=1}^{n} \sigma^2 = n.\sigma^2$$

$$\sigma(S_n) = \sigma\sqrt{n}$$

Ce théorème traduit : $\frac{S_n - E(S_n)}{\sigma(S_n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} \mathcal{N}(0,1)$

La convergence en probabilité $\Rightarrow$ la C.V. en loi.

Si la suite X_n converge en loi vers une constante alors on a la convergence en probabilité.

5.5 Exercice 1

Soit (X_n) une suite de V.A. de densité $f_n(x) = \frac{n.e^{-nx}}{(1+e^{-nx})^2}$

Montrez que $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} 0$

5.6 Exercice 2

Soit X une V.A. suivant une loi exponentielle de densité :

$$\begin{cases} f(x) & = & 0 & si\ x \leq 0 \\ f(x) & = & e^{-x} & si\ x > 0 \end{cases}$$

$X_1, X_2, ..., X_n$ une suite de V.A. indépendantes de même loi que X.

Soit $U_n = \underset{1\leq i\leq n}{I_n} .f.X_i$

Montrer que $U_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} 0$

5.7 Exercice 3

Soit $f_n(x) = (n+1)(1-x)^n$ si $x \in [0,1]$, et $f_n(x) = 0$ sinon.

1. Vérifier que f_n est une densité de probabilité
2. Soit X_n une suite de V.A. admettant $f_n(x)$ pour densité. On pose $Y_n = nX_n$.

   Montrez que $Y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}}$ avec Y une V.A. suivant une loi exponentielle.

5.8 Exercice 4

On effectue n tirages avec remise dans une urne contenant 2 boules blanches et 4 boules bleues.

$$\forall i \in [1...n], \quad X_i = \begin{cases} 1 & si\ la\ boule\ tiree\ est\ blanche \\ 0 & sinon \end{cases}$$

1. Etudier la convergence en probabilité de $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$
2. Déterminer le nombre minimum n_0 de tirages nécessaires pour que $\mathcal{P}\Big(\big|\overline{X_n} - \frac{1}{3}\big| \geq 0,02\Big) \leq 0.01$ (utiliser Tchebgehev)
3. En utilisant le théorème centrale limite, déterminer une autre valeur n_1 répondant à la question précedente.