Nombres complexes
Corrigé des exercices avec astérisque

Exercice 4*

1. On a
$$z = \left[\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}\right]^2 = \frac{(1-i)^4}{4} = \frac{1-4i-6+4i+1}{4}$$
donc $z = -1$.

2. On a $i^5 = i$ et $i^{15} = i^3 = -i$ donc
$$z = \left(\frac{2+i}{1-i}\right)^2 = \left[\frac{(2+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}\right]^2 = \frac{(1+3i)^2}{4}$$
donc $z = -2 + \frac{3i}{2}$.

Exercice 7*

1. $j = e^{\frac{2i\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.
   $j^2 = e^{\frac{4i\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.
   Donc $1 + j + j^2 = 1 - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$.
   $j^3 = e^{2i\pi} = 1$.

2. En développant et en utilisant $j^3 = 1$, on a
   $(u+1)(u+j)(u+j^2) = u^3 + j^2u^2 + ju^2 + u + u^2 + j^2u + ju + 1 = u^3 + u^2(1+j+j^2) + u(1+j+j^2) + 1$
   or $1 + j + j^2 = 0$ d'où $(u+1)(u+j)(u+j^2) = u^3 + 1$.
   De même,
   $(1+u)(1+ju)(1+j^2u) = 1 + j^2u + ju + u^2 + u + j^2u^2 + ju^2 + u^3 = u^3 + 1 + u(1+j+j^2) + u^2(1+j+j^2)$
   donc
   $$(1+u)(1+ju)(1+j^2u) = u^3 + 1$$
   soit finalement
   $$(u+1)(u+j)(u+j^2) = (1+u)(1+ju)(1+j^2u)$$

3. De la même manière
   $$(u+v)(u+jv)(u+j^2v) = u^3 + v^3 + u^2v(1+j+j^2) + uv^2(1+j+j^2)$$
   soit finalement
   $$(u+v)(u+jv)(u+j^2v) = u^3 + v^3$$

Exercice 8*

1. Via le changement de variable $u = z^n$, l'équation devient

$$u^2 - 2u\cos(\alpha) + 1 = \big(u - \cos(\alpha)\big)^2 + 1 - \cos^2(\alpha) = \big(u - \cos(\alpha)\big)^2 - \big(i\sin(\alpha)\big)^2 = 0$$

c'est-à-dire

$$\big(u - \cos(\alpha) - i\sin(\alpha)\big)\big(u - \cos(\alpha) + i\sin(\alpha)\big) = 0$$

dont les deux racines sont

$$u_1 = \cos(\alpha) + i\sin(\alpha) = e^{i\alpha} \text{ et } u_2 = \cos(\alpha) - i\sin(\alpha) = e^{-i\alpha} = \overline{u_1}$$

Ainsi l'équation initiale (à coefficients réels) admet n couples de racines $(z_k, \overline{z_k})$ avec $z_k = e^{i(\alpha/n + 2k\pi/n)}$ et $k = 0, 1, ..., n-1$.

2. En multipliant par z, on a

$$z^2 - 2z\cos(\alpha) + 1 = 0$$

Ainsi, via les résultats de la question précédente, l'équation admet deux solutions

$$z_1 = e^{i\alpha} \text{ et } z_2 = \overline{z_1} = \frac{1}{z_1}$$

Ainsi

$$z^n + \frac{1}{z^n} = z^n + \overline{z}^n = e^{in\alpha} + e^{-in\alpha} = 2\cos(n\alpha)$$