EPITA

S1 17/18

Séminaire
Mathématiques/Algorithmique

(5.09.2017/15.09.2017)

By Hyperion

Nombres complexes

N.B. : ces exercices sont à chercher chez vous les mardi 5 et mercredi 6 septembre. Un corrigé de ceux présentant **un astérisque** *vous sera distribué le jeudi 7. Tous les autres sont traités en cours.*

Exercice 1

Écrire sous forme trigonométrique (ou exponentielle) les complexes ci-dessous.

1. $-5i$.
2. -3.
3. $3 + i\sqrt{3}$.
4. $2\sqrt{3} - 6i$.
5. $\dfrac{1-i}{i\sqrt{3}-1}$.

Exercice 2

Considérons le complexe

$$v = \sqrt{2-\sqrt{2}} - i\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

1. Calculer v^2 et v^4.
2. En déduire le module et un argument de v.

Exercice 3

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $(1+i)^n + (1-i)^n$ et $(1+i)^n - (1-i)^n$.

Exercice 4*

Mettre sous forme algébrique $a + ib$ les complexes ci-dessous.

1. $z = \left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^2$.
2. $z = \left(\dfrac{2+i^5}{1+i^{15}}\right)^2$.

Exercice 5

Linéariser les expressions ci-dessous.

1. $\sin^3(x)$.
2. $\cos^2(x)\sin(x)$.
3. $\cos^3(x)\sin^2(x)$.

Exercice 6

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations ci-dessous.

1. $z^2 + z + 1 = 0$.
2. $z^2 + (i-3)z + 4 - 3i = 0$.
3. $u^2 + (1-5i)u - 3i - 6 = 0$.

Exercice 7*

Notons j le nombre complexe $e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

1. Montrer que $1 + j + j^2 = 0$ et $j^3 = 1$.
2. En calculant à part chaque membre de l'égalité, montrer que pour tout $u \in \mathbb{C}$,
$$(u+1)(u+j)(u+j^2) = (1+u)(1+ju)(1+j^2u)$$
3. Montrer que pour tout $(u,v) \in \mathbb{C}^2,\ u^3 + v^3 = (u+v)(u+jv)(u+j^2v)$.

Exercice 8*

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in [0, 2\pi[$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^{2n} - 2z^n\cos(\alpha) + 1 = 0$.
2. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $z + \dfrac{1}{z} = 2\cos(\alpha)$. Donner l'expression de $z^n + \dfrac{1}{z^n}$.

Exercice 9

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$. Déterminer les sommes suivantes :

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \sin(kx) \quad \text{et} \quad C_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$$

Calcul intégral

N.B. : ces exercices sont à chercher chez vous les jeudi 7 et vendredi 8 septembre. Un corrigé de ceux présentant **un astérisque** *vous sera distribué le lundi 11. Tous les autres sont traités en cours.*

Exercice 1

Dériver formellement les fonctions f, g, h ci-dessous (sans se préoccuper du domaine de définition).

– $f(x) = \sin^{42}\Big(\ln\big(x\sin(x)\big)\Big)$.

– $g(x) = \sqrt{\ln\Big(e^{x^2}+1\Big)}$.

– $h(x) = \ln\Big(2^x - \sin\big(\sin(x)\big)\Big)$.

Exercice 2

Calculer les intégrales ci-dessous.

1. $\displaystyle\int_0^1 xe^x \,\mathrm{d}x$.
2. $\displaystyle\int_0^\pi x\sin(x)\,\mathrm{d}x$.
3. $\displaystyle\int_1^e \ln(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 3*

Déterminer $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+x^2)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 4

Déterminer les intégrales ci-dessous.

1. $\displaystyle\int_0^\pi x^2\sin(x)\,\mathrm{d}x$.
2. $\displaystyle\int_0^\pi e^x\sin(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 5*

Calculer $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{t(1+t)}$ puis $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln(1+t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 6*

On considère pour tout $n \in \mathbb{N}$ les intégrales

$$I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{n!} e^{1-t}\, \mathrm{d}t$$

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Montrer, via une intégration par parties, que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$I_n = I_{n-1} - \frac{1}{n!}$$
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$I_n = e - \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!}$$
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n!}$$
5. En déduire la limite de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 7

Soit la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\, \mathrm{d}t$$

1. Calculer I_0, I_1 et I_2.
2. Montrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on a
$$nI_n = (n-1)I_{n-2}$$
3. En déduire la valeur de I_{2p} et I_{2p+1} pour tout entier p positif.
4. Vérifier que pour tout entier non nul n,
$$t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \Longrightarrow \cos^n(t) \leqslant \cos^{n-1}(t)$$
5. Montrer que la suite $(u_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ définie par $u_p = \frac{I_{2p-2}}{I_{2p}}$ converge vers 1 et en déduire que
$$\pi = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \left[\frac{2.4.6...(2n-2).2n}{1.3.5...(2n-3).(2n-1)} \right]^2$$

Exercice 8

Déterminer, via le changement de variable $t = \sqrt{x}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^4 e^{\sqrt{x}} \mathrm{d}x$.

Exercice 9

Déterminer, via le changement de variable $u = \ln(t)$, l'intégrale $\displaystyle\int_1^e \frac{\mathrm{d}t}{t\big(1 + \ln^2(t)\big)}$.

Exercice 10*

Déterminer, via le changement de variable $u = 1 + x^2$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 11

Déterminer, via le changement de variable $u = \sqrt{x}$, l'intégrale $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 12*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer, via le changement de variable $u = nx$ que

$$\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin^2(nx)} = \int_0^\pi \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin^2(x)}$$

Exercice 13*

Méthode de calcul des intégrales de la forme $\displaystyle\int \sin^p(x)\cos^q(x)\,\mathrm{d}x$:

- si p impair, on pose $t = \cos(x)$;
- si q impair, on pose $t = \sin(x)$;
- si p et q sont pairs, on linéarise.

Via cette méthode, déterminer

1. $\displaystyle\int \cos^6(x)\sin^3(x)\,\mathrm{d}x$.
2. $\displaystyle\int \cos^5(x)\sin^5(x)\,\mathrm{d}x$.
3. $\displaystyle\int \cos^2(x)\sin^4(x)\,\mathrm{d}x$.