Calcul intégral
Corrigé des exercices avec astérisque

Exercice 3*

En intégrant par parties, on a (en posant $u = \ln(1+x^2)$ et $v' = 1$)

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \ln(1+x^2)\mathrm{d}x &= \big[x\ln(1+x^2)\big]_0^1 - 2\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \ln(2) - 2\int_0^1 \frac{1+x^2-1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \ln(2) - 2\int_0^1 \mathrm{d}x + 2\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \ln(2) - 2 + 2\big[\arctan(x)\big]_0^1 \\
&= \ln(2) - 2 + \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Exercice 5*

On a

$$\frac{1}{t(1+t)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{1+t}$$

d'où

$$\int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{t(1+t)} = \big[\ln(t) - \ln(1+t)\big]_1^2 = 2\ln(2) - \ln(3)$$

En intégrant par parties (en posant $u = \ln(1+t)$ et $v' = \frac{1}{t^2}$), on a

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \frac{\ln(1+t)}{t^2}\mathrm{d}t &= -\left[\frac{1}{t}\ln(1+t)\right]_1^2 + \int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{t(1+t)} \\
&= -\left(\frac{1}{2}\ln(3) - \ln(2)\right) + 2\ln(2) - \ln(3) \\
&= 3\ln(2) - \frac{3}{2}\ln(3)
\end{aligned}$$

Exercice 6*

1. $I_0 = \displaystyle\int_0^1 e^{1-t}\mathrm{d}t = e - 1.$

$I_1 = \int_0^1 te^{1-t}\mathrm{d}t$. En intégrant par parties, on a

$$\begin{aligned} I_1 &= -\left[te^{1-t}\right]_0^1 + \int_0^1 e^{1-t}\mathrm{d}t \\ &= -1 + e - 1 \\ &= e - 2 \end{aligned}$$

2. Par une intégration par parties, on a

$$\begin{aligned} I_n &= -\left[\frac{t^n}{n!}e^{1-t}\right]_0^1 + I_{n-1} \\ &= -\frac{1}{n!} + I_{n-1} \end{aligned}$$

3. On a

$$\begin{aligned} I_n &= I_{n-1} - \frac{1}{n!} \\ I_{n-1} &= I_{n-2} - \frac{1}{(n-1)!} \\ \vdots &= \vdots \\ I_1 &= I_0 - 1 \end{aligned}$$

En additionnant membre à membre ces égalités, on a

$$I_n = I_0 - 1 - \frac{1}{2!} - \cdots - \frac{1}{n!}$$

soit comme $I_0 = e - 1$,

$$I_n = e - \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!}$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Considérons la fonction $f_n(t) : t \mapsto t^n e^{1-t}$ sur $[0, 1]$.

On a pour tout $t \in [0, 1]$, $f_n'(t) = t^{n-1}e^{1-t}(n - t) \geqslant 0$.

Donc f_n est croissante sur $[0, 1]$. Elle atteint son maximum en $t = 1$ or $f_n(1) = 1$.

Ainsi pour tout $t \in [0, 1]$, $f_n(t) \leqslant 1$. Donc

$$I_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n!}\int_0^1 \mathrm{d}t = \frac{1}{n!}$$

D'autre part, comme pour tout $t \in [0, 1]$, $f_n(t) \geqslant 0$, on a $I_n \geqslant 0$.

5. En appliquant le théorème des gendarmes on en conclut que I_n tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 10*

Posons $u = 1 + x^2$. Alors $\mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x$. Ainsi

$$\begin{aligned} \int_0^1 x\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_1^2 \sqrt{u}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{2}\int_1^2 u^{1/2}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{3}\left(2^{3/2}-1\right) \end{aligned}$$

Exercice 12*

Posons $u = nx$. Alors $\mathrm{d}x = \dfrac{1}{n}\mathrm{d}u$ donc

$$\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin^2(nx)} = \frac{1}{n}\int_0^{n\pi} \frac{\mathrm{d}u}{1+\sin^2(u)}$$

or la fonction $u \mapsto \sin^2(u)$ est π-périodique donc

$$\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin^2(nx)} = \frac{1}{n}\cdot n\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}u}{1+\sin^2(u)}$$

soit (la variable u étant muette)

$$\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin^2(nx)} = \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin^2(x)}$$

Exercice 13*

1. Posons $t = \cos(x)$. Alors $\mathrm{d}t = -\sin(x)\,\mathrm{d}x$. Donc

$$\int \cos^6(x)\sin^3(x)\,\mathrm{d}x = \int \cos^6(x)\sin^2(x)\sin(x)\,\mathrm{d}x = \int \cos^6(x)\big(1-\cos^2(x)\big)\sin(x)\,\mathrm{d}x$$

c'est-à-dire

$$\int \cos^6(x)\sin^3(x)\,\mathrm{d}x = -\int t^6(1-t^2)\mathrm{d}t = \frac{t^9}{9} - \frac{t^7}{7}$$

soit finalement

$$\int \cos^6(x)\sin^3(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\cos^9(x)}{9} - \frac{\cos^7(x)}{7} \text{ (+ constante)}$$

2. Posons $t = \cos(x)$ (on aurait pu également poser $t = \sin(x)$). Alors $\mathrm{d}t = -\sin(x)\,\mathrm{d}x$.

$$\int \cos^5(x)\sin^5(x)\,\mathrm{d}x = \int \cos^5(x)\sin^4(x)\sin(x)\,\mathrm{d}x = \int \cos^5(x)\big(1-\cos^2(x)\big)^2\sin(x)\,\mathrm{d}x$$

Donc

$$\int \cos^5(x)\sin^5(x)\,\mathrm{d}x = -\int t^5\big(1-t^2\big)^2\,\mathrm{d}t = -\frac{t^6}{6} + \frac{t^8}{4} - \frac{t^{10}}{10}$$

c'est-à-dire

$$\int \cos^5(x)\sin^5(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{\cos^6(x)}{6} + \frac{\cos^8(x)}{4} - \frac{\cos^{10}(x)}{10} \text{ (+ constante)}$$

3. Comme $p = 4$ et $q = 2$ sont pairs, on linéarise. En utilisant les formules d'Euler

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

on a

$$\cos^2(x)\sin^4(x) = \frac{1}{64}\left(e^{2ix} + 2 + e^{-2ix}\right)\left(e^{4ix} - 4e^{2ix} + 6 - 4e^{-2ix} + e^{-4ix}\right)$$

soit après simplification

$$\cos^2(x)\sin^4(x) = \frac{1}{64}\left(2\cos(6x) - 2\cos(2x) - 4\cos(4x) + 4\right)$$

soit encore

$$\cos^2(x)\sin^4(x) = \frac{1}{16}\left(\frac{\cos(6x)}{2} - \frac{\cos(2x)}{2} - \cos(4x) + 1\right)$$

soit finalement après intégration

$$\int \cos^2(x)\sin^4(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{16}\left(\frac{\sin(6x)}{12} - \frac{\sin(2x)}{4} - \frac{\sin(4x)}{4} + x\right) \ (+\,\text{constante})$$