Fonctions

(trois semaines)

(du lundi 18 septembre 2017 au vendredi 6 octobre 2017)

Exercice 1

Montrer que l'équation $x^{17} = x^{11} + 1$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}^+$.

Exercice 2

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$ telles que $g(a) = f(b)$ et $g(b) = f(a)$.

Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $g(c) = f(c)$.

Exercice 3

Soient f et g continues sur $[0,1]$ telles que $f(0) = g(1) = 0$ et $f(1) = g(0) = 1$.

Montrer que

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}^+ \quad \exists x \in [0,1],\ f(x) = \lambda g(x)$$

Exercice 4

Soit $f\ :\ [a,b] \to [a,b]$ continue telle que $f([a,b]) \subset [a,b]$.

Montrer que f admet un point fixe c'est-à-dire qu'il existe $\alpha \in [a,b]$ tel que $f(\alpha) = \alpha$.

Exercice 5

Soient a et b deux réels et $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. Montrer que le polynôme $X^n + aX + b$ admet au plus trois racines réelles.

Exercice 6

Soit f dérivable sur un intervalle ouvert I.

1. Montrer que si f s'annule en n points de I alors sa dérivée f' s'annule en au moins $(n-1)$ points de I.
2. Soit P un polynôme à coefficients réels. Montrer que l'équation $P(x) = e^x$ n'admet qu'un nombre fini de racines réelles.

Exercice 7

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $f\ :\ I \to \mathbb{R}\quad n$ fois dérivable.

Montrer que si f admet au moins $n+1$ racines distinctes, alors $f^{(n)}$ possède au moins une racine.

By Hyperion

Exercice 8

Soient f et g continues sur $[a, b]$, dérivables sur $]a, b[$ telles que pour tout $x \in]a, b[$, $g'(x) \neq 0$.

Montrer que $g(b) - g(a) \neq 0$ et qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Exercice 9

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}_*^+$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.

1. Soit $g : \left\{ \begin{array}{ccc} [a, b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(f(x)) \end{array} \right.$

   Montrer que g vérifie les hypothèses du théorème des accroissements finis et montrer à l'aide de ce dernier qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$\ln(f(b)) - \ln(f(a)) = (b - a)\frac{f'(c)}{f(c)}$$

2. En déduire qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$\frac{f(b)}{f(a)} = e^{(b-a)\frac{f'(c)}{f(c)}}$$

Exercice 10

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$, dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$ telle que $f(0) = 0$ et f' croissante sur $\mathbb{R}_*^+$.

Via le théorème des accroissements finis, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$,

$$\frac{f(x)}{x} \leqslant f'(x)$$

Exercice 11

Soit f strictement décroissante et continue sur $\mathbb{R}$.

Montrer que f admet un unique point fixe.

Exercice 12

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$.

1. Montrer que si $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

2. Montrer que si $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = 0$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$.

By Hyperion

Exercice 13

Soient $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, f et g deux fonctions définies au voisinage de a.
On dit que f est négligeable devant g au voisinage de a, et on note $f = o_a(g)$, si, au voisinage de a,

$$f(x) = g(x)\varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$$

On dit que f est équivalente à g au voisinage de a, et on note $f \underset{a}{\sim} g$, si, au voisinage de a,

$$f(x) = g(x)\big(1 + \varepsilon(x)\big) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$$

1. Comparer les fonctions f et g dans les cas suivants :
   a. $f : x \longmapsto x^2$, $g : x \longmapsto x$, $a = +\infty$ et $a = 0$.

   b. $f : x \longmapsto 3x^2 + x - 8$ et $g : x \longmapsto 3x^2$ pour $a = +\infty$.

   Quel est l'équivalent de la fonction f en 0 ?

   c. $f : x \longmapsto e^x$, $g : x \longmapsto x^\alpha$ ($\alpha > 0$) et $a = +\infty$.
2. Que signifie $f \underset{a}{\sim} 0$? Quels sont les équivalents en 0 de $x \mapsto \sin(x)$, $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto e^x - 1$?
3. Soient f, g, h et k quatre fonctions définies au voisinage de a telles que $f \underset{a}{\sim} g$ et $h \underset{a}{\sim} k$. On suppose de plus que h et k ne s'annulent pas au voisinage de a.

   Montrer qu'au voisinage de a, on a $fh \underset{a}{\sim} gk$ et $\dfrac{f}{h} \underset{a}{\sim} \dfrac{g}{k}$. A-t-on $f + h \underset{a}{\sim} g + k$?
4. Trouver les équivalents en $+\infty$ et en 0 de $x \longmapsto \dfrac{7x^3 - 8x}{1 - x^2}$, $x \longmapsto \dfrac{3x^2 + \ln x}{e^x + e^{-x}}$.

Exercice 14

Rappeler les développements limités au voisinage de 0 à l'ordre 6 des fonctions suivantes :

1. $f(x) = e^x$.
2. $g(x) = \ln(1 + x)$.
3. $h(x) = (1 + x)^\alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R}^*$.
4. $i(x) = \sin(x)$.
5. $j(x) = \cos(x)$.

Exercice 15

Déterminer, au voisinage de 0, les développements limités des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \cos(x)e^x$ à l'ordre 4.
2. $g(x) = e^{\cos(x)}$ à l'ordre 3.

By Hyperion

3. $h(x) = \sqrt{1+2x}$ à l'ordre 4.

4. $i(x) = \ln(1+e^x)$ à l'ordre 2.

5. $j(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ à l'ordre 2.

6. $k(x) = \ln(2+x)$ à l'ordre 3.

7. $l(x) = \big(\ln(1+x)\big)^2$ à l'ordre 4.

8. $m(x) = \big(\cos(x)\big)^{\sin(x)}$ à l'ordre 4.

Exercice 16

Déterminer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{x-42}\right)^x$.

2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}$.

3. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{x^2}$.

4. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x^2$.

5. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \cos(x) - x}{x - \ln(1+x)}$.

6. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\ln(1+x)}$.

7. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln\big(1+\sin(x)\big) - \sin\big(\ln(1+x)\big)}{x^2\sin(x^2)}$.

8. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(x) - x\ln(1+x)}{e^x + \cos(x) - \sin(x) - 2}$.

By Hyperion