Logique

(une semaine)

(du lundi 23 octobre 2017 au vendredi 27 octobre 2017)

Exercice 1

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Traduire en termes de quantificateurs les assertions suivantes :

1. f est bornée.
2. f ne s'annule jamais.
3. f est périodique.
4. f est croissante.
5. f n'est pas la fonction nulle.

Exercice 2

1. Écrire la négation des assertions suivantes :

   a. $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2 \quad \big[a < b \Longrightarrow (\exists x \in \mathbb{Q} \quad a < x < b)\big]$.

   b. $\exists \ell \in \mathbb{R} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \big(n \geqslant N \Longrightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon\big)$.

   c. $\forall (x, y, a) \in \mathbb{R}^3 \quad \big[(x < a \text{ et } y < a) \Longrightarrow \exists z \in \mathbb{R} \quad (z < a \text{ et } x \neq z \text{ et } y \neq z)\big]$.

2. Écrire la négation des phrases suivantes, sachant que le terme « certains » signifie ici « au moins un ».

   a. « Si l'hiver n'est pas trop rude, je ferai des économies d'énergie ».

   b. « Théo se joint à nous si et seulement si je sors de chez moi ».

   c. « Certains étudiants s'endorment en cours de maths ! »

   d. « Certains étudiants n'auront pas la moyenne au contrôle de maths ».

   e. « Aucune piste criminelle n'est écartée ».

   f. « Tous les étudiants de province devront suivre le cycle ingénieur à Paris Sud ».

Exercice 3

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$,

$$1^3 + 3^3 + \cdots + (2n-1)^3 = 2n^4 - n^2$$

2. Montrer que pour tout $n \geqslant 4$,

$$n! > 2^n$$

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} k.k! = (n+1)! - 1$$

Exercice 4

Préciser (via un graphe dans les cas favorables et via un contre-exemple dans les cas défavorables) si l'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$ est injective et/ou surjective dans les cas suivants :

1. $E = F = \mathbb{N}$.
2. $E = \mathbb{Z}$ et $F = \mathbb{N}$.
3. $E = \mathbb{R}$ et $F = \mathbb{R}_+$.
4. $E = F = \mathbb{R}_+$.

Exercice 5

Soient E, F, G trois ensembles, $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$.

1. On suppose que f et g sont injectives. Montrer que $g \circ f$ est injective.
2. On suppose que f et g sont surjectives. Montrer que $g \circ f$ est surjective.
3. Montrer que $g \circ f$ injective $\Longrightarrow f$ injective.
4. Montrer que $g \circ f$ surjective $\Longrightarrow g$ surjective.