Corrigé du contrôle 1

Exercice 1 (2 points)

$$\begin{cases} f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{\ln^{10}\left(\sin(x)\right)+1}} \cdot 10\ln^9\left(\sin(x)\right) \cdot \dfrac{1}{\sin(x)} \cdot \cos(x) \\ \\ g'(x) = \cos\left(\arctan(\sqrt{x})\right) \cdot \dfrac{1}{1+x} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \end{cases}$$

Exercice 2 (3 points)

1. $z^2 = 4\sqrt{3} - 4i = 8\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i\right) = 8e^{-i\pi/6}$.

2. $z = re^{i\theta}$ où r et θ sont respectivement le module et un argument de z.

   $z^2 = r^2e^{2i\theta}$ d'où, via la question précédente, $r^2 = 8$ et $2\theta = -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

   Comme r est nécessairement strictement positif, $\mathrm{Re}(z) > 0$ et $\mathrm{Im}(z) < 0$, le module et un argument de z sont respectivement $2\sqrt{2}$ et $-\dfrac{\pi}{12}$.

Exercice 3 (6 points)

1. $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan(x)}{1+x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\arctan^2(x)\right]_0^1 = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 = \frac{\pi^2}{32}$.

2. Via une intégration par parties, en posant $u(x) = \ln(x)$ et $v'(x) = \dfrac{1}{x^2}$, on a

$$\begin{aligned} J = \int_1^e \frac{\ln(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x &= -\left[\frac{\ln(x)}{x}\right]_1^e - \int_1^e -\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{e} - \left[\frac{1}{x}\right]_1^e \\ &= 1 - \frac{2}{e} \end{aligned}$$

3. Via le changement de variable $u = \ln(t)$, $\mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}t}{t}$ donc

$$\begin{aligned} K &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} \\ &= \left[\arctan(u)\right]_0^1 \\ &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

4. Via le changement de variable $u = \sqrt{x}$, $x = u^2$ donc $\mathrm{d}x = 2u\,\mathrm{d}u$. Ainsi

$$\begin{aligned}
L &= \int_0^1 \frac{1-u^2}{1+u}\,2u\,\mathrm{d}u \\
&= 2\int_0^1 u(1-u)\,\mathrm{d}u \quad \text{car } 1-u^2 = (1+u)(1-u) \\
&= 2\left[\frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3}\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Exercice 4 (4 points)

1. $\Delta = (5+3i)^2 - 4(2+9i) = 8 - 6i$.

2. Déterminons une racine de Δ.

   On cherche $\delta = a + ib$ tel que $\delta^2 = 8 - 6i$. Ainsi $\begin{cases} a^2 - b^2 = 8 \\ a^2 + b^2 = \sqrt{8^2 + (-6)^2} \\ 2ab = -6 \end{cases}$ soit $\begin{cases} a^2 - b^2 = 8 \\ a^2 + b^2 = 10 \\ ab < 0 \end{cases}$

   Donc $\delta = 3 - i$ est une racine carrée de $8 - 6i$.

3. Ainsi $z = \frac{1}{2}(5 + 3i + 3 - i)$ ou $z = \frac{1}{2}(5 + 3i - 3 + i)$.

   Donc $z = 4 + i$ ou $z = 1 + 2i$.

Exercice 5 (4 points)

1. $$\begin{aligned}
e^x \ln(e + ex) &= e^x \ln\big(e(1+x)\big) \\
&= e^x\big(1 + \ln(1+x)\big) \\
&= \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)\left(1 + x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) \\
&= 1 + x - \frac{x^2}{2} + x + x^2 + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \\
&= 1 + 2x + x^2 + o(x^2)
\end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned}
\big(1 + \sin(x)\big)^{1/x} &= e^{\ln(1+\sin(x))/x} \\
&= e^{\ln(1+x+o(x))/x} \\
&= e^{(x+o(x))/x} \\
&= e^{1+o(1)}
\end{aligned}$$

donc $\lim\limits_{x\to 0}\big(1+\sin(x)\big)^{1/x} = e$.

3. $$\begin{aligned}\frac{e^x-\cos(x)-\sin(x)}{x^2} &= \frac{1+x+\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)-\left(1-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)\right)-\big(x+o(x^2)\big)}{x^2}\\ &= \frac{x^2+o(x^2)}{x^2}\\ &= 1+o(1)\end{aligned}$$

donc $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\cos(x)-\sin(x)}{x^2} = 1$.

Exercice 6 (2 points)

Soit g la fonction définie pour tout $x\in[0,1/2]$ par $g(x)=f(x)-f\left(x+\dfrac{1}{2}\right)$.

g est continue sur $[0,1/2]$ car f l'est sur $[0,1/2]$ et sur $[1/2,1]$.

D'autre part, $g(0)=f(0)-f(1/2)$ et $g(1/2)=f(1/2)-f(1)=f(1/2)-f(0)=-g(0)$.

Ainsi, comme g est continue sur $[0,1/2]$ et $g(0)$, $g(1/2)$ de signes contraires, on en déduit, via le théorème des valeurs intermédiaires, qu'il existe $c\in[0,1/2]$ tel que $g(c)=0$ c'est-à-dire tel que $f(c)=f\left(c+\dfrac{1}{2}\right)$.