251

EPITA

Mathématiques

Contrôle (S1)

novembre 2017

Nom : MAUBANC

Prénom : Rémi

Entourer le nom de votre professeur de TD : Mme Boudin / Mme Daadaa / M. Ghanem / M. Goron / Mme Trémoulet

Classe : A2

NOTE :

Contrôle 1

Durée : trois heures
Documents et calculatrices non autorisés

Consignes :

– vous devez répondre directement sur les feuilles jointes.

– ***aucune autre feuille, que celles agrafées fournies pour répondre, ne sera corrigée.***

– aucune réponse au crayon de papier ne sera corrigée.

– toute personne ne respectant pas ces consignes se verra attribuer la note 00/20.

Exercice 1 (2 points)

Soient f et g les fonctions définies par $\begin{cases} f(x) = \sqrt{\ln^{10}\left(\sin(x)\right) + 1} \\ \\ g(x) = \sin\left(\arctan(\sqrt{x})\right) \end{cases}$

Calculer $f'(x)$ et $g'(x)$ (sans se préoccuper du domaine de définition).

N.B. : n'essayez pas de simplifier les résultats.

Exercice 2 (3 points)

Soit $z = 1 + \sqrt{3} + i(1 - \sqrt{3})$.

1. Déterminer z^2 sous forme exponentielle.

2. En déduire le module et un argument de z.

Exercice 3 (6 points)

1. Déterminer, sans intégration par parties ni changement de variable, $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan(x)}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

2. Via une intégration par parties, déterminer $J = \displaystyle\int_1^e \frac{\ln(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

3. Via le changement de variable $u = \ln(t)$, déterminer $K = \displaystyle\int_1^e \frac{\mathrm{d}t}{t\left(1+\ln^2(t)\right)}$.

4. Via le changement de variable $u = \sqrt{x}$, déterminer $L = \displaystyle\int_0^1 \frac{1-x}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 4 (4 points)

Soit l'équation (E) suivante : $z^2 - (5+3i)z + 2 + 9i = 0$.

1. Montrer que $\Delta = 8 - 6i$.

2. Déterminer une racine carrée de Δ.

3. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E).

Exercice 5 (4 points)

1. Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 2 de $e^x \ln(e + ex)$.

2. Déterminer $\lim_{x \to 0} \left(1 + \sin(x)\right)^{1/x}$.

3. Déterminer $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^x - \cos(x) - \sin(x)}{x^2}$.

Exercice 6 (2 points)

Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $f(0) = f(1)$. Montrer qu'il existe $c \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ tel que $f(c) = f\left(c + \frac{1}{2}\right)$.