Algèbre linéaire II

(deux semaines)

(du lundi 9 avril 2018 au vendredi 20 avril 2018)

Exercice 1

Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Calculer AB et BA.

Exercice 2

Soient $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Calculer AB et BA.

Exercice 3

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

Déterminer A^2, A^3 et A^4.

Exercice 4

Soient a et b deux réels, $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Exprimer A en fonction de I_3, J et J^2.
2. En déduire A^n pour tout entier naturel n non nul.

Exercice 5

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Déterminer la matrice A^{-1}.

2. Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ par

$$f(x, y, z) = (x + y - 2z,\ x - y + z,\ -2x + y - z)$$

Montrer que f est bijective et déterminer f^{-1}.

Exercice 6

Soient $E = \mathbb{R}_2[X]$ et $f : E \longrightarrow E$ définie pour tout $P \in E$ par $f(P) = 2(X + 1)P - (X^2 + 1)P'$ et id l'application identique de E c'est-à-dire pour tout $P \in E$, $id(P) = P$.

Soient enfin $\mathscr{B} = \big(1, X, X^2\big)$ et $\mathscr{B}' = \big(1, X - 1, (X + 1)^2\big)$ deux bases de E.

1. Déterminer $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$, matrice de f relativement à la base $\mathscr{B}$.
2. Déterminer $B = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)$, matrice de f relativement à la base $\mathscr{B}'$.
3. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f)$, matrice de f relativement aux bases $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$.
4. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(f)$, matrice de f relativement aux bases $\mathscr{B}'$, $\mathscr{B}$.
5. Déterminer $P = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(id)$ et $Q = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(id)$.
6. Déterminer l'inverse de la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(id)$. Que constatez-vous ?
7. Déterminer $P^{-1}AP$. Que constatez-vous ?

Exercice 7

1. Déterminer la matrice d'une rotation vectorielle d'angle θ relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer la matrice d'une rotation vectorielle d'axe $(0z)$ et d'angle θ relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer la matrice d'une symétrie orthogonale d'axe $(0x)$ relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 8

Soient $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P(X) & \longmapsto & P(X) - XP'(X) \end{array} \right.$ et $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ P(X) & \longrightarrow & \big(P(-1), P(0), P(1)\big) \end{array} \right.$

Déterminer les matrices des applications linéaires suivantes relativement aux bases canoniques.

Exercice 9

Soit $f \in \mathscr{L}\big(\mathscr{M}_2(\mathbb{R})\big)$ définie par $f : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$.

En ayant vérifié que f est bien linéaire, écrire la matrice de f relativement à la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 10

Les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes.

1. Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow \mathbb{R}_2[X] \\ P(X) & \longmapsto (X^2-1)P(2)+2XP(3) \end{cases}$

   Déterminer la matrice de f relativement à la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

2. Soient $g : \begin{cases} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow \mathbb{R}_3[X] \\ P(X) & \longmapsto P(X+1) \end{cases}$ et $h : \begin{cases} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow \mathbb{R}_3[X] \\ P(X) & \longmapsto P(X-1) \end{cases}$

   a. Déterminer les matrices de g et h relativement à la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.

   b. Déterminer la matrice de g^{-1} relativement à la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.

3. Soient $u : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto (x+2y+z, y+2z) \end{cases}$ et $v : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto (3x+y, x, 2y) \end{cases}$

   a. Déterminer les matrices de u et v relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

   b. Déterminer les matrices de $u \circ v$ et $v \circ u$ relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

Exercice 11

Soient $(x_0, ..., x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ fixé et V l'application de $\mathbb{R}_n[X]$ vers $\mathbb{R}^{n+1}$ définie pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$ par

$$V(P) = \big(P(x_0), \dots, P(x_n)\big)$$

Déterminer la matrice de V relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathbb{R}^{n+1}$.

Exercice 12

Soient E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie et $(u,v) \in \big(\mathscr{L}(E)\big)^2$. On note id l'application identique de E dans E c'est-à-dire définies pour tout $x \in E$ par $id(x) = x$.

1. Via le théorème du rang, montrer que si u est injective, alors u est bijective. Montrer de même que si u est surjective, alors u est bijective.

2. Montrer que $u \circ v = id \Longrightarrow u$ surjective.

3. Montrer que $v \circ u = id \Longrightarrow u$ injective.

4. Soient $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$ et $(A, B) \in \mathscr{M}_n^2(\mathbb{R})$ tel que $AB = I_n$ où I_n est la matrice identité d'ordre n.

   En considérant les endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ associés à A et B, montrer que A est inversible et $BA = I_n$.

Exercice 13

On note I la matrice identité d'ordre 3. Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Vérifier que $J^2 - J - 2I = 0$. En déduire J^{-1} en fonction de I et J.

   N.B. : on rappelle que s'il existe $K \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ tel que $JK = I$ alors J est inversible et $J^{-1} = K$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On effectue la division euclidienne de X^n par $X^2 - X - 2$. Il existe donc $Q(X) \in \mathbb{R}[X]$ et $R(X) \in \mathbb{R}[X]$ tels que
$$X^n = (X^2 - X - 2)Q(X) + R(X)$$
   avec le degré de R strictement inférieur à 2.

   Ainsi il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que
$$X^n = (X^2 - X - 2)Q(X) + aX + b$$
   En remarquant que 2 et -1 sont racines de $X^2 - X - 2$ déterminer a et b.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. En déduire J^n en fonction de n, I et J.

   N.B. : On substituera J à l'indéterminée X de la question 2 (sachant que le polynôme 1 devient I).

   Par exemple, $X^4 + 2X^3 + 4$ devient après substitution $J^4 + 2J^3 + 4I$.