$\frac{a^n}{n!} = 0 \Leftrightarrow \frac{a^n}{\cancel{n!}} = 0 \Leftrightarrow a = 0$

or $P(0) = 1 \neq 0$ contradiction.

CCL : $\gamma = \mathbb{D}$

Cours sur les suites

I/ Suites arithmétiques.

Déf : Soit (U_n) une suite. On dit que (U_n) est une suite arithmétique si $\exists\, r \in \mathbb{R}$ tq
$\forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = U_n + r$
avec $U_0 \in \mathbb{R}$ donné.

Ex : $\begin{cases} U_{n+1} = U_n + 3 \\ U_0 = 28 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} U_{n+1} = U_n + 2^n \\ U_0 = 100 \end{cases}$

→ Suite arithmético-géométrique.

⚠ r est indépendant de n

* Expression de U_n en f° de n :

$U_n = U_{n-1} + r$
$U_{n-1} = U_{n-2} + r$
$+$ $\vdots$
$U_2 = U_1 + r$
$U_1 = U_0 + r$

$U_n + \cancel{U_{n-1}} + \dots + \cancel{U_2} + \cancel{U_1} = \cancel{U_{n-1}} + \cancel{U_{n-2}} + \dots + \cancel{U_2} + U_0 + \underbrace{r + r + r \dots + r}_{n \text{ fois}}$

$\boxed{\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N}\ \ U_n = U_0 + rn}$

Maths
14/12

Plus généralement, pour $p \in \mathbb{N}$ donné :
$$U_n = U_p + (n-p)r$$

Ex :

$$U_{100} = U_{20} + 80r$$
$$U_{100} = 31 - 400$$
$$U_{100} = 369$$

* Sommes des n+1 premiers termes.

$$S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n.$$
$$S_n = U_n + U_{n-1} + \dots + U_0$$
$$\Rightarrow 2S_n = (U_0 + U_n) + (U_1 + U_{n-1}) + \dots + (U_n + U_0)$$
or $\forall p \in [\![0, n]\!]$, $U_p + U_{n-p} = U_0 + pr + U_0 + (n-p)r$.
$$= U_0 + U_0 + nr = U_0 + U_n$$
D'où $2S_n = (U_0 + U_n) + (U_0 + U_n) + \dots + (U_0 + U_n)$
$$2S_n = (n+1)(U_0 + U_n)$$

Donc $S_n = \dfrac{(n+1)(U_0 + U_n)}{2}$

Rq :
$$S_n = \frac{\text{nb de terme}}{2}(\text{premier terme} + \text{dernier terme})$$

Plus généralement :

$$U_p + U_{p+1} + \dots + U_n = \frac{n-p+1}{2}(U_p + U_n)$$

Suites géométriques

Déf : (U_n) tq $\exists q \in \mathbb{R}$ | et $\forall n \geq p$, $U_n = U_p q^{n-p}$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = qU_n$
avec $U_0 \in \mathbb{R}$ donné

* U_n en fonction de n ?
$\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = q^n U_0$

* Somme

$$U_0 + U_1 + \dots + U_n = U_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \text{ si } q \neq 1$$

$$= 1^{er} \text{ terme } \frac{1-q^{\text{nb de terme}}}{1-q}$$

$$U_p + U_{p+1} + \dots + U_n = U_p \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$$

* $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n$ $\begin{cases} +\infty \text{ si } q > 1 \\ 1 \text{ si } q = 1 \\ 0 \text{ si } -1 < q < 1 \text{ cad } |q| < 1 \\ \text{pas de lim si } q \leq -1 \end{cases}$

BY HYPERION

Suites arithmético-géométrique

Def : soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

On dit que (U_n) est arithmético-géométrique si $\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a \neq 0$ et $b \neq 0$, $a \neq 1$ tq.

$$\begin{cases} U_{n+1} = aU_n + b \\ U_0 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Prop : $\exists\, \ell \in \mathbb{R}$ tq $(V_n) = (U_n - \ell)$ soit géométrique de raison a

Preuve : Posons $V_n = U_n - \ell$

$$V_{n+1} = U_{n+1} - \ell = aU_n + b - \ell$$
$$= a\left(U_n + \frac{b-\ell}{a}\right)$$
$$= a\left(V_n + \ell + \frac{b-\ell}{a}\right)$$
$$= a\left(V_n + \frac{a\ell + b - \ell}{a}\right)$$

Ainsi, pour $\frac{a\ell + b - \ell}{a} = 0$, (V_n) est géométrique de raison a

Rq : $\frac{a\ell + b - \ell}{a} = 0 \iff a\ell + b - \ell = 0$
$\iff (a-1)\ell = -b$
$\iff \ell = \frac{-b}{a-1} =$

BY HYPERION

Rq = $\left| \begin{array}{l} U_{n+1} = aU_n + b \\ \ell = a\ell + b \end{array} \right|$

$\Rightarrow (1-a)\ell = b$

$\ell = \dfrac{b}{1-a}$

Exemple : $\begin{cases} U_{n+1} = -3U_n + 15 \\ U_0 = 4 \end{cases}$ Q_1 U_n en fonction de n ?

Q_2 $U_0 + \dots + U_n$?

R_1 :

- Cherchons $\ell \in \mathbb{R}$ tq $\ell = -3\ell + 15$

Ainsi $\ell = \dfrac{15}{4}$

- Considérons $(V_n) = \left(U_n - \dfrac{15}{4}\right)$

$V_{n+1} = U_{n+1} - \dfrac{15}{4}$

$V_{n+1} = -3U_n + 15 - \dfrac{15}{4}$

$V_{n+1} = -3U_n - \dfrac{45}{4}$

$V_{n+1} = -3\left(U_n - \dfrac{45}{3\times 4}\right) = -3\left(U_n - \dfrac{15}{4}\right)$

$V_{n+1} = -3V_n$

Donc (V_n) géométrique de raison -3

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}, V_n = (-3)^n V_0 = (-3)^n \left(U_0 - \dfrac{15}{4}\right) = (-3)^n \left(4 - \dfrac{15}{4}\right)$

càd $\forall n \in \mathbb{N}, V_n = \dfrac{(-3)^n}{4}$

CCL : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = V_n + \dfrac{15}{4} = \dfrac{(-3)^n}{4} + \dfrac{15}{4}$

BY HYPERION

28670821

Module 30 : Mathématiques :
Limite d'une suite numérique

I/ Limite finie, limite infinie

Def : La suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite $\ell \in \mathbb{R}$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tq } (n \geq N \Rightarrow |U_n - \ell| \leq \varepsilon)$$

- On note $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \ell$, ou $U_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.
- $|U_n - \ell| \leq \varepsilon \Longleftrightarrow \ell - \varepsilon \leq U_n \leq \ell + \varepsilon$.

BY HYPERION

Def : la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ si :

$$\forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} \text{ tq } (n \geq N \Rightarrow U_n \geq A)$$

La suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$ si la suite $(-U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

Def : Une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente si elle admet une limite finie. Elle est divergente sinon (y compris lorsqu'elle tend vers $+\infty$)

Proposition : Si une suite est convergente, sa limite est unique.

Module 31 : Mathématiques
Théorèmes de convergence

I/ Suites monotones

Théorème : Toute suite croissante et majorée converge

- Toute suite décroissante et minorée est convergente
- Une suite croissante qui n'est pas majorée tend vers $+\infty$.

BY HYPERION

Démonstration

- Notons $A = \{U_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$
- Si M majore la suite (U_n) alors A est majoré par M.
- Notons $\ell = \sup A$
- Montrons que $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \ell$
  - ▷ Soit $\varepsilon > 0$
  - ▷ $\exists\, U_N \in A$, tq $\ell - \varepsilon < U_N \leq \ell$
  - ▷ Pour $n \geq N$, on a $\ell - \varepsilon < U_N \leq U_n \leq \ell$
  - ▷ Donc $|U_n - \ell| \leq \varepsilon$

Example : Soit $U_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$

- (U_n) est croissante : $U_{n+1} - U_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$
- Montrons par récurrence que $U_n \leq 2 - \frac{1}{n}$
  - ▷ $U_1 = 1 \leq 2 - \frac{1}{1}$
  - ▷ Fixons $n \geq 1$ pour lequel on suppose $U_n \leq 2 - \frac{1}{n}$
    - * $U_{n+1} = U_n + \frac{1}{(n+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2}$
    - * Or $\frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$
    - * Donc $U_{n+1} \leq 2 - \frac{1}{n+1}$

Critère de divergence : Si une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous suite divergente ou bien si elle admet deux ~~sous~~ sous suites convergent vers des limites distinctes, alors elle diverge.

Exemple :

- Soit la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $U_n = (-1)^n$
- Alors $(U_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1
- Et $(U_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers -1.
- Conclusion : la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge

Théorème de Bolzano - Weierstrass :
Toute suite bornée admet une sous suite convergente.

Exemples :

- Si $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $U_n = (-1)^n$ on a deux sous suites $(U_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(U_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergente
- Si $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour terme général $V_n = \cos(n)$, le théorème affirme qu'il existe une sous suite convergente, mais il est moins facile de l'expliciter

BY HYPERION

III 1- Formes indéterminées, limite et inégalités

① " $+\infty - \infty$ " ▷ $\lim\limits_{n\to+\infty} (e^n - \ln(n)) = +\infty$

▷ $\lim\limits_{n\to+\infty} (n - n^2) = -\infty$

▷ $\lim\limits_{n\to+\infty} ((n + \frac{1}{n}) - n) = 0$

② " $0 \times \infty$ " ▷ $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln(n)} \times e^n = +\infty$

▷ $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \times \ln(n) = 0$

▷ $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \times (n+1) = 1$

③ " $\frac{\infty}{\infty}$ ", " $\frac{0}{0}$ ", " 1^{∞} ", ...

BY HYPERION

Proposition :

① Soient $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites convergentes telles que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n \leq V_n$. Alors

$$\lim_{n\to+\infty} U_n \leq \lim_{n\to+\infty} V_n .$$

② Soient $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $V_n \geq U_n$. Alors,

$$\lim_{n\to+\infty} V_n = +\infty .$$

Théorème d'encadrement :

Si $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont trois suites telles que $\forall n$

$u_n \leq v_n \leq w_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell = \lim\limits_{n\to+\infty} W_n$

alors la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \ell$

Exemple : Trouver la limite de $U_n = 2 + \frac{(-1)^n}{1+n+n^2}$

Exemple : $U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ et $V_n = U_n + \frac{2}{n+1}$

(U_n) et (V_n) sont deux suites adjacentes :

① ▷ (U_n) est croissante car $U_{n+1} - U_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$

▷ (V_n) est décroissante car $V_{n+1} - V_n = \frac{-n}{(n+2)(n+1)^2} < 0$

② $\forall n \geq 1$: $V_n - U_n = \frac{2}{n+1} > 0$, donc $U_n \leq V_n$

③ $V_n - U_n = \frac{2}{n+1}$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (V_n - U_n) = 0$

Conclusion :

- les suites (U_n) et (V_n) sont adjacentes
- Elles convergent vers une même limite ℓ
- Encadrement $U_n \leq \ell \leq V_n$
- Exemple $n = 3$ $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} \leq \ell \leq 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{2}$
- $1,3611\ldots \leq \ell \leq 1,8611\ldots$

III / Suites extraites et Théorème de Bolzano-Weierstrass

Définition : Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. Une suite extraite ou une sous suite de $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de la forme $(U_{\phi(n)})$ où $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une application strictement croissante.

Définition : Une suite extraite de $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de la forme $(U_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$

Exemple : $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de terme général $U_n = (-1)^n$

- $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\phi(n) = 2n$, $U_{\phi(n)} = (-1)^{2n} = 1$

  La suite extraite $(U_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à 1.

- $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\psi(n) = 3n$, $U_{\psi(n)} = (-1)^{3n} = ((-1)^3)^n = (-1)^n$

  La suite $(U_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est donc égale à $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Proposition : Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \ell$, alors $\forall (U_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ on a $\lim\limits_{n\to+\infty} U_{\phi(n)} = \ell$.

BY HYPERION

II 1- Propriété des limites :

Proposition : Opérations sur les limites finies

① Si $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \ell$, où $\ell \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \lambda U_n = \lambda \ell$.

② Si $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \ell$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = \ell'$, où $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} (U_n + V_n) = \ell + \ell'$

et $\lim\limits_{n \to +\infty} (U_n V_n) = \ell\ell'$

③ Si $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \ell$ où $\ell \in \mathbb{R}^*$ alors $U_n \neq 0$ alors pour n assez grand

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{U_n} = \frac{1}{\ell}$$

Exemple :

Si $U_n \to \ell$ avec $\ell \neq \pm 1$ alors

$$U_n(1 - 3U_n) - \frac{1}{U_n^2 - 1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell(1 - 3\ell) - \frac{1}{\ell^2 - 1}$$

Proposition : Opérations sur les limites infinies

① Si $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{U_n} = 0$

② Si $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 0$ et $U_n > 0$ pour n assez grand alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{U_n} = +\infty$

③ Si $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty$ et $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée alors $\lim\limits_{n \to +\infty} (U_n + V_n) = +\infty$

④ Si $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty$ et $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée par un nombre $\lambda > 0$ alors

$\lim\limits_{n \to +\infty} (U_n \times V_n) = +\infty$

BY HYPERION

▷ Ce qui achève la récurrence

- (U_n) est croissante et majorée par 2 : elle converge
- Cette limite est $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$

Suite harmonique :

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tq $U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Calculons $\lim_{n\to+\infty} U_n$

- La suite (U_n) est croissante : $U_{n+1} - U_n = \frac{1}{n+1} > 0$
- Minoration de $U_{2^p} - U_{2^{p-1}}$:

$$U_{2^p} - U_{2^{p-1}} = \frac{1}{2^{p-1}+1} + \frac{1}{2^{p-1}+2} + \dots + \frac{1}{2^p} > 2^{p-1} \times \frac{1}{2^p} = \frac{1}{2}$$

- $U_{2^p} - 1 = U_{2^p} - U_1 = (U_2 - U_1) + (U_4 - U_2) + \dots + (U_{2^p} - U_{2^{p-1}}) \geq \frac{p}{2}$
- $\lim_{n\to+\infty} U_n = +\infty$

II - Suite adjacentes

Définition : Deux suites $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dites adjacentes si

① $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante

② $\forall n \geq 0$, on a $U_n \leq V_n$

③ $\lim_{n\to+\infty} (V_n - U_n) = 0$

Théorèmes :

Si (U_n) et (V_n) sont adjacentes, elles convergent et ont la même limite.

Démonstration :

- (U_n) est croissante et majorée par V_0 donc elle converge vers une limite ℓ
- (V_n) est décroissante et minorée par U_0, donc elle converge vers une limite ℓ'
- Comme $\lim_{n\to+\infty} (V_n - U_n) = 0$, d'où $\ell - \ell' = 0$

Proposition : Toute suite convergente est bornée.

Démonstration :

- Soit (U_n) une suite convergente vers $\ell \in \mathbb{R}$
- Définition de limite avec $\varepsilon = 1$: $\forall N \in \mathbb{N}.\ (n \geq N \Rightarrow |U_n - \ell| \leq 1$
- Pour $n \geq N$ on a :

$$|U_n| = |\ell + (U_n - \ell)| \leq |\ell| + |U_n - \ell| \leq |\ell| + 1$$ (Inégalité triangulaire)

- On pose $M = \max(|U_0|, |U_1|, \dots, |U_{N-1}|, |\ell|+1)$
- $\forall n \in \mathbb{N},\ |U_n| \leq M$.

Proposition : Si la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (U_n \times V_n) = 0$

Exemple : $U_n = \cos(n)$ et $V_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ alors $U_n V_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Démonstration :

- (U_n) est bornée, $\forall M > 0$, tq $|U_n| \leq M$
- Fixons $\varepsilon > 0$
  - > Définition de la limite à la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$
  - > Pour $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{M}$
  - > $\exists N \in \mathbb{N},\ (n \geq N \Rightarrow |V_n| \leq \varepsilon'$
- Pour $n \geq N$ on a :

$$|U_n V_n| = |U_n||V_n| \leq M \times \varepsilon' = M \times \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$$

Proposition : Si $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \ell'$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (U_n \times V_n) = \ell \times \ell'$

Démonstration :

- $U_n V_n - \ell\ell' = (U_n - \ell)V_n + \ell(V_n - \ell')$
- $\ell(V_n - \ell') \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
- $(U_n - \ell)V_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
  - > $U_n - \ell \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ > $V_n \to \ell'$ donc (V_n) est bornée
  - > par la proposition précédente : $(U_n - \ell)V_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
- Conclusion : $U_n V_n - \ell\ell' \to 0$

BY HYPERION