Suites arithmétiques, géométriques et arithmético-géométriques

(une semaine)

(du lundi 18 décembre 2017 au vendredi 22 décembre 2017)

Exercice 1

Soit une feuille de papier de 0,1 mm d'épaisseur. On la plie en deux puis encore en deux et ainsi de suite. Quelle épaisseur de papier obtiendrait-on si on pouvait répéter l'opération 30 fois ? 50 fois ?

Exercice 2

Prenez un jeu d'échecs. Imaginez que vous déposiez un grain de blé sur la première case, 2 grains sur la seconde, 4 grains sur la troisième et ainsi de suite en doublant à chaque fois le nombre de grains jusqu'à la 64ᵉcase.

1. Combien de grains de blé devront être posés sur l'échiquier ?
2. En admettant que 1024 grains pèsent 100 grammes, déterminer la masse totale des grains de blé sur l'échiquier (exprimée en tonnes) ?
3. En 2016, la production française de blé a atteint de 36 millions de tonnes. Combien d'années de production faudrait-il pour remplir l'échiquier ?
4. Si vous déposiez un grain à la seconde, combien d'années faudrait-il pour remplir l'échiquier ?

Exercice 3

Considérons les suites (u_n) et (v_n) définies par

$$u_0 = 5 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = 2u_n + 3$$

$$v_0 = 1 \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n + \frac{1}{4}$$

Exprimer u_n et v_n en fonction de n.

Exercice 4

Une entreprise de télésurveillance possédait en 2010 500000 clients. Elle perd tout d'abord tous les ans 10% de ses clients mais en revanche parvient à trouver chaque année 20000 nouveaux clients. Notons c_n le nombre de clients (en milliers) en $2010 + n$ de sorte que $c_0 = 500$.

1. Déterminer c_1 et c_2.
2. Déterminer c_{n+1} en fonction de c_n.
3. Déterminer c_n en fonction de n.
4. Estimer le nombre de clients à long terme.

$u_{n+1} = a u_n + b$

$u_{n+1} - R = a(u_n - b)$

$a u_n + b - R = a u_n - aR$

$aR - R = -b$

$R = \frac{-b}{a-1} = \frac{b}{1-a}$

cl : Si $u_{n+1} = a u_n + b$

$u_n - \frac{b}{1-a}$ est géo de raison a

Olivier Rodot

Exercice 5

Chaque année, les parents de Gaspard, né le premier janvier 1997, ont déposé de l'argent dans sa tirelire. Ils ont commencé le 2 janvier 1997 par un dépôt de 100€ (ou plus exactement l'équivalent en Francs de l'époque !). Ensuite ils ont effectué un dépôt chaque 2 janvier en augmentant chaque année le montant du dépôt précédent de 10€.
On note u_n le montant en euro de la somme déposée dans la tirelire le 2 janvier de l'année $1997 + n$ et s_n le montant en euro de la somme contenue dans la tirelire après le dépôt de l'année $1997 + n$.

1. Déterminer u_n en fonction de n.
2. Déterminer s_n en fonction de n.
3. Le 2 janvier 2015, les parents de Gaspard effectuent leur dépôt habituel.
   Gaspard vient d'avoir 18 ans et décide de casser sa tirelire. Quel est alors le montant qu'il découvre ?
4. Gaspard décide alors de placer sur un compte bancaire une partie de la somme. Il effectue le même 2 janvier 2015 un placement de 3000€ à intérêts composés au taux annuel de 4%. De plus, chaque 2 janvier des années suivantes, il ajoute sur son compte 200€.
   On note c_n le montant en euro du capital disponible sur son compte après n années de placement.
   a. Déterminer c_n en fonction de n.
   b. Combien d'années, au minimum, devra-t-il attendre pour disposer d'une somme de 6000€ ?

Exercice 6

On considère une suite de carrés $(C_n)_{n\geqslant 0}$ dont les longueurs des côtés forment une suite géométrique $(a_n)_{n\geqslant 0}$ de raison $q > 0$.

1. Les suites des périmètres (P_n) et des aires (S_n) de ces carrés sont-elles des suites géométriques ?
2. Reprendre la première question en remplaçant « géométrique » par « arithmétique ».

Exercice 7

Les rayons cosmiques produisent continuellement dans l'atmosphère du ^{14}C, un élément radioactif[1]. Durant leur vie, les tissus animaux et végétaux contiennent la même proportion de ^{14}C que l'atmosphère. Cette proportion initiale de ^{14}C décroît de 1,24 % en 100 ans, après la mort du tissu.

1. Déterminer les pourcentages de la proportion initiale de ^{14}C contenu dans le tissu au bout de 1000 ans, 2000 ans et 10000 ans.
2. Exprimer le pourcentage de la proportion initiale de ^{14}C contenu dans le tissu au bout de $k.10^3$ années.
3. Un fossile ne contient plus que 10 % de ce qu'il devait contenir en ^{14}C. Donner une estimation de son âge.

1. Carbone 14 découvert en 1940 par Martin Kamen et Samuel Ruben.

Exercice 8

Un capital $C_0 = 15000€$ rapporte 3,5% d'intérêts par an. Chaque année, les intérêts sont capitalisés. On note C_n le capital disponible au bout de n années.

1. Montrer que (C_n) est géométrique.
2. Calculer la plus petite valeur de n pour laquelle $C_n \geqslant 2\,C_0$.
3. Déterminer le taux d'intérêt t nécessaire pour que le capital ait doublé au bout de 10 ans.

Exercice 9

1. Soit (u_n) une suite à termes strictement positifs vérifiant

$$\exists (k,p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N},\ k > 1,\ \forall n \geqslant p \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant k$$

   Montrer que (u_n) tend vers $+\infty$.

2. Soit (u_n) une suite à termes strictement positifs vérifiant

$$\exists (k,p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N},\ 0 < k < 1,\ \forall n \geqslant p \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant k$$

   Montrer que (u_n) tend vers 0.