15/01 Maths :

Suites : Exercices n°1 :

1) $u(x) = \cancel{x}\, x$ — 7) $U_n = \ln(n)$

2) $u(x) = -x$ — 8)

3) $u(x) = \sin(x)$ — 9)

4) $u(x) = 4$ — 10)

5) $\cancel{\ln(x)}$ $U(n) = 0{,}25U_n + 1$ — 11)

6) — 12) $u(x) = e^x$

Rappels :

(U_n) majorée $\Longleftrightarrow \exists M \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N},\ U_n \leq M$

(U_n) minorée $\Longleftrightarrow \exists m \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N},\ U_n \geq m$

(U_n) bornée $\Longleftrightarrow \exists A \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ |U_n| \leq A$.

3) Périodique : (U_n) périodique si $\exists T \in \mathbb{N}^*\ \forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+T} = U_n$

4) $\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = \dfrac{(-1)^n}{2}$.

5) • $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ U_n = \dfrac{\cancel{2}1}{n}$ car $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq U_n \leq 2$.

• $\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = \cos(n)$ car $\forall n \in \mathbb{N},\ |\cos(n)| \leq 1$.

6) Déf (U_n) alternée si $\forall n \in \mathbb{N}$ $U_n \times U_{n+1} < 0$

Ex : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $U_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$

$$U_{n+1} \times U_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \times \frac{(-1)^n}{n} = \frac{(-1)^{2n+1}}{(n+1)n} = \frac{-1}{(n+1)n} < 0$$

7) $\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = \dfrac{(-1)^n}{4}$, (U_n) bornée car $\forall n \in \mathbb{N},\ |U_n| \leq \dfrac{1}{4}$

et $((-1)^n)$ n'a pas de limite

8) $\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = -n$. (U_n) majorée car $\forall n \in \mathbb{N}$ $U_n \leq 0$ or $U_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} -\infty$ donc (U_n) non minorée.

9) $\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = 2^n(-1)^n$

10) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ U_n = \dfrac{n-1}{n} = 1 - \dfrac{1}{n}$ car $\forall n \in \mathbb{N}^*\ U_n \leq 1$ et $\lim\limits_{+\infty} U_n = 1$

12) $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = n$; $U_n = e^n$

13) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = 1 - \frac{1}{n}$

14) $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = n^2$

15) $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = -n^2$

Exercice n°2 : 1) Rappels : (U_n) CV $\Rightarrow$ (U_n) bornée
Toute suite convergente est bornée :
Contraposée (U_n) non bornée $\Rightarrow (U_n)$ DV.

2) FAUX : Ex : $((-2)^n)$ est bornée et DV.

3) Rappels : CV + CV $\Rightarrow$ CV
DV + DV $\Rightarrow$?
CV + DV $\Rightarrow$ DV
Preuve : (H) (U_n) CV et (V_n) DV
AD $((U_n + V_n))$ DV
Par l'absurde supposons $(U_n + V_n)$ CV
Comme (U_n) CV, on a
$(U_n + V_n) - U_n$ CV
cad (V_n) CV Absurde.

Exercice n°3 : (H) $0 < a < b$

$\begin{cases} a_0 = a \\ a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n) \end{cases}$ et $\begin{cases} b_0 = b \\ b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1} b_n} \end{cases}$

1) AD $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n$
* $\boxed{n=0}$ AD $0 \leqslant a_0 \leqslant a_1 \leqslant b_1 \leqslant b_0$

① $a_0 = a \geq 0$

② $a_1 = \frac{a+b}{2} \geq \frac{a+a}{2} = a = a_0$

③ $b_1 = \sqrt{a_1 b_0} = \sqrt{\frac{a+b}{2} \times b_0} = \sqrt{\frac{a+b}{2} \times \frac{b+b}{2}} \geq \sqrt{\frac{a+b}{2} \times \frac{a+b}{2}}$

càd

$$b_1 \geq \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2} = \frac{a+b}{2} = a_1.$$

4) $b_1 = \sqrt{\frac{a+b}{2} \times b} \leq \sqrt{\frac{b+b}{2} \times b} = \sqrt{b^2} = b$.

* Supposons la propriété vraie au rang n et ~~non~~ montrons-la au rang $n+1$.

(HR) $0 \underset{①}{\leq} a_n \underset{②}{\leq} a_{n+1} \underset{③}{\leq} b_{n+1} \underset{④}{\leq} b_n$

AD) $0 \underset{①}{\leq} a_{n+1} \underset{②}{\leq} a_{n+2} \underset{③}{\leq} b_{n+2} \underset{④}{\leq} b_{n+1}$

① OK via ① et ②

② $a_{n+2} = \frac{a_{n+1}+b_{n+1}}{2} \geq \frac{a_{n+1}+a_{n+1}}{2}$ par ②

③

$$b_{n+2} = \sqrt{a_{n+2}\, b_{n+1}} = \sqrt{\frac{a_{n+1}+b_{n+1}}{2} \times b_{n+1}} = \sqrt{\frac{a_{n+1}+b_{n+1}}{2} \times \frac{b_{n+1}+b_{n+1}}{2}}$$

$$\geq \sqrt{\frac{a_{n+1}+b_{n+1}}{2} \times \frac{b_{n+1}+b_{n+1}}{2}} = \sqrt{\left(\frac{a_{n+1}+b_{n+1}}{2}\right)^2} = a_{n+2} \text{ via}$$

④ $b_{n+2} = \sqrt{\frac{a_{n+1}+b_{n+1}}{2} \times b_{n+1}} \leq \sqrt{\frac{b_{n+1}+b_{n+1}}{2} \times b_{n+1}} = \sqrt{b_{n+1}^2} = b_{n+1}$.
via

CCL: $\forall n \in \mathbb{N}$ $0 \leq a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$

2°) De 1°), on a $(a_n) \nearrow$ et $(b_n) \searrow$ et ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$

D'où

* (a_n) est $\nearrow$ et majorée par $b_0 = b$ ainsi (a_n) CV. Notons $\ell \leq b_0$ sa limite

* (b_n) est $\searrow$ et majorée par 0 ainsi (b_n) CV. Notons ℓ' sa limite

On a :

$\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$

Ainsi $\lim\limits_{n \to +\infty} a_{n+1} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{a_n + b_n}{2}$

càd $\ell = \dfrac{\ell + \ell'}{2}$

$\Rightarrow 2\ell = \ell + \ell'$

$\ell = \ell'$

$a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$ (H) $a = b\cos(\alpha)$ $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

$\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \dfrac{\cos(\alpha)+1}{2}$

$b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1} + b_n}$

Formule trigo:

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\cos(a+b) = \cos^2 a - \sin^2 a$ (avec $a = b$)

$\cos(a+b) = \cos^2 a - (1 - \cos^2 a)$

$\cos(a+b) = 2\cos^2 a - 1$

$\cos^2(a) = \dfrac{\cos(2a)+1}{2}$

$a_1 = \dfrac{a+b}{2} = \dfrac{b\cos(\alpha)+b}{2} = \dfrac{b(\cos(\alpha)+1)}{2} = b\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

$b_1 = \sqrt{a_1 + b_0} = \sqrt{b\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + b} = \sqrt{b^2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$

$= \left|b\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right|$

$= b\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

$a_2 = \dfrac{a_1 + b_1}{2} = \dfrac{b\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + b\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{2} = \dfrac{b\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)+1\right)}{2}$

$= b\cos\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) \times \dfrac{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)+1}{2} = b\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\alpha}{4}\right)$

$$b_2 = \sqrt{a_2 b_1} = \sqrt{b\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\alpha}{4}\right) b\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \sqrt{b^2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\alpha}{4}\right)}$$
$$= b\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{4}\right)$$

4) $b_n = b\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\alpha}{4}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{8}\right)\times\dots\times\cos^2\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)$

$a_n = b\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{4}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{8}\right)\times\dots\times\cos^2\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)$

$b_n = b\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{\alpha}{2^k}\right)$

$a_n = \prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{\alpha}{2^k}\right)\times b\cos\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)$

5) $\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b$

$\sin(2a) = 2\sin a\cos a$

D'où $\forall u \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \cos(u) = \frac{\sin(2u)}{2\sin(u)}$

$a_1 = b\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = b\,\frac{\sin^2(\alpha)}{2\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$

$b_1 = b\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{b\sin(\alpha)}{2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$

$a_2 = b\,\frac{\sin(\alpha)}{2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\times\frac{\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{2\sin^2\left(\frac{\alpha}{4}\right)} =$

$b_2 = b\,\frac{\sin(\alpha)}{2\cancel{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}}\times\frac{\cancel{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}}{2\sin\left(\frac{\alpha}{4}\right)} = b\,\frac{\sin(\alpha)}{4\sin\left(\frac{\alpha}{4}\right)}$

6) $\frac{\alpha}{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

$\Rightarrow \sin\left(\frac{\alpha}{2^n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\alpha}{2^n}$

$\Rightarrow 2^n\sin\left(\frac{\alpha}{2^n}\right) \underset{+\infty}{\sim} 2^n\times\frac{\alpha}{2^n} = \alpha$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} 2^n\sin\left(\frac{\alpha}{2^n}\right) = \alpha$

CCL: $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \frac{b\sin(\alpha)}{\alpha} = \lim a_n$

Exercice n°4 . $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k}$

1) . $1 \leq k \leq n$

$\Rightarrow n^2+1 \leq k+n^2 \leq n+n^2$

$\Rightarrow \frac{1}{n^2+1} \geq \frac{1}{k+n^2} \geq \frac{1}{n^2+n}$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+1} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+n}$

Nombre de terme dans la suite

$\Rightarrow n \times \frac{1}{n^2+1} \geq U_n \geq n \frac{1}{n^2+n}$

càd $\frac{n}{n^2+n} \leq U_n \leq \frac{n}{n^2+1}$ *

$\Rightarrow \frac{1}{n+1} \leq U_n \leq \frac{1}{n^2+1}$

or $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n^2+1} = 0$

D'où par les Gendarmes, (U_n) converge

or $\lim_{n\to+\infty} U_n = 0$

2) * $\Rightarrow \frac{n}{n+1} \leq n U_n \leq \frac{n^2}{n^2+1}$

or $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = 1$

Ainsi par les Gendarmes, $\lim_{n\to+\infty} n U_n = 1$

Exercice n°5 $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*, U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$

$1 \leq k \leq n$

$\Rightarrow n+1 \leq n+k \leq 2n$

$\frac{1}{n+1} \geq \frac{1}{n+k} \geq \frac{1}{2n}$

$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+1} \geq \sum_{n=1}^{n} \frac{1}{n+k} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2n}$

$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+1} \geq U_n \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2n}$

Nombre de terme dans la suite : n

$n \times \frac{1}{n+1} \geq U_n \geq n \times \frac{1}{2n}$

$1 \geq \frac{n}{n+1} \geq U_n \geq \frac{1}{2}$

* Monotonie de (U_n).

$$U_{n+1} - U_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+1+k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+1+k} = \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}$$

$$- \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2(n+1)} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \geq 0$$ Donc $(U_n) \nearrow$

Exercice n°6 (H) $a > 1$.

$$\begin{cases} U_0 = a \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}\left(U_n + \frac{a}{U_n}\right) \end{cases}$$

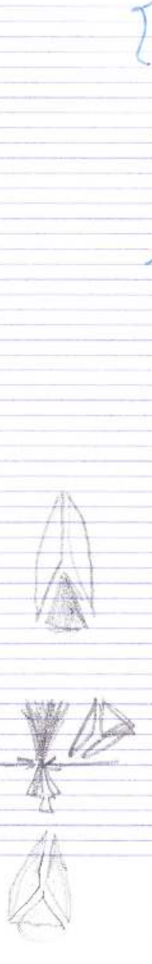
$\forall n \in \mathbb{N}$

$$V_n = \frac{U_n - \sqrt{a}}{U_n + \sqrt{a}}$$

Rq $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n > 0$ et $V_n > 0$

1) $V_n = V_{n-1}^2$

$$V_{n+1} = V_n^2 = \frac{(U_n - \sqrt{a})^2}{(U_n + \sqrt{a})^2} = \frac{U_n^2 - 2\sqrt{a}\,U_n + a}{U_n^2 + 2\sqrt{a}\,U_n + a} = \frac{(U_n - \sqrt{a})^2}{(U_n + \sqrt{a})^2}$$



$$V_{n+1} = \frac{U_{n+1} - \sqrt{a}}{U_{n+1} + \sqrt{a}} = \frac{\frac{1}{2}\left(U_n + \frac{a}{U_n}\right) - \sqrt{a}}{\frac{1}{2}\left(U_n + \frac{a}{U_n}\right) + \sqrt{a}} =$$

$$2V_{n+1} = \frac{U_n + \frac{a}{U_n} - 2\sqrt{a}}{U_n + \frac{a}{U_n} + 2\sqrt{a}} =$$

$$V_n = \frac{U_n - \sqrt{a}}{U_n + \sqrt{a}} = \frac{\frac{1}{2}\left(U_{n-1} + \frac{a}{U_{n-1}}\right) - \sqrt{a}}{\frac{1}{2}\left(U_{n-1} + \frac{a}{U_{n-1}}\right) + \sqrt{a}}$$

$$= \frac{\frac{U_{n-1}^2 + a - 2\sqrt{a}\,U_{n-1}}{2U_{n-1}}}{\frac{U_{n-1}^2 + a + 2\sqrt{a}\,U_{n-1}}{2U_{n-1}}}$$

$$= \frac{U_{n-1}^2 - 2\sqrt{a}\,U_{n-1} + a}{U_{n-1}^2 + 2\sqrt{a}\,U_{n-1} + a}$$

$$= \frac{(U_{n-1} - \sqrt{a})^2}{(U_{n-1} + \sqrt{a})^2} = V_{n-1}^2 .$$

2) $V_1 = \frac{U_0 - \sqrt{a}}{U_0 + \sqrt{a}} = \frac{a - \sqrt{a}}{a + \sqrt{a}} =$

$V_1 = V_0^2$ $\quad\quad V_n = V_0^{2^n}$

$V_2 = V_1^2$ $\quad\quad V_n = \left(\frac{a - \sqrt{a}}{a + \sqrt{a}}\right)^{2^n}$

$V_n = V_{n-1}^2$

3) $a - \sqrt{a} < a + \sqrt{a}$ et $a \geq 1$

donc $0 < \frac{a - \sqrt{a}}{a + \sqrt{a}} < 1$ et 2^n quand $n \to +\infty = +\infty$.

⚠

donc $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{a - \sqrt{a}}{a + \sqrt{a}}\right)^{2^n} = 0 = \lim_{n \to +\infty} V_n$

4) $V_n = \frac{U_n - \sqrt{a}}{U_n + \sqrt{a}}$

d'où $(U_n + \sqrt{a})V_n = U_n - \sqrt{a}$

$\Rightarrow U_n V_n + \sqrt{a}\,V_n = U_n - \sqrt{a}$

$\Rightarrow U_n V_n - U_n = -\sqrt{a}\,V_n - \sqrt{a}$

$\Rightarrow (V_n - 1)U_n = -\sqrt{a}\,V_n - \sqrt{a}$

$\Rightarrow U_n = \frac{-\sqrt{a}\,V_n - \sqrt{a}}{V_n - 1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{-\sqrt{a}}{-1} = \sqrt{a}$

$$V_n = \frac{U_n - \sqrt{a}}{U_n + \sqrt{a}} = \frac{\frac{1}{2}\left(U_{n-1} + \frac{a}{U_{n-1}}\right) - \sqrt{a}}{\frac{1}{2}\left(U_{n-1} + \frac{a}{U_{n-1}}\right) + \sqrt{a}}$$

$$= \frac{\dfrac{U_{n-1}^2 + a - 2\sqrt{a}\,U_{n-1}}{2U_{n-1}}}{\dfrac{U_{n-1}^2 + a + 2\sqrt{a}\,U_{n-1}}{2U_{n-1}}}$$

$$= \frac{U_{n-1}^2 - 2\sqrt{a}\,U_{n-1} + a}{U_{n-1}^2 + 2\sqrt{a}\,U_{n-1} + a}$$

$$= \frac{(U_{n-1} - \sqrt{a})^2}{(U_{n-1} + \sqrt{a})^2} = V_{n-1}^2 .$$

2) $V_1 = \dfrac{U_0 - \sqrt{a}}{U_0 + \sqrt{a}} = \dfrac{a - \sqrt{a}}{a + \sqrt{a}} =$

$V_1 = V_0^2$ $\qquad$ $V_n = V_0^{2^n}$

$V_2 = V_1^2$ $\qquad$ $V_n = \left(\dfrac{a - \sqrt{a}}{a + \sqrt{a}}\right)^{2^n}$

$V_n = V_{n-1}^2$

3) $a - \sqrt{a} < a + \sqrt{a}$ et $a \geq 1$

donc $0 < \dfrac{a - \sqrt{a}}{a + \sqrt{a}} < 1$ et 2^n quand $n \to +\infty = +\infty$.

⚠

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{a - \sqrt{a}}{a + \sqrt{a}}\right)^{2^n} = 0 = \lim\limits_{n \to +\infty} V_n$

4) $V_n = \dfrac{U_n - \sqrt{a}}{U_n + \sqrt{a}}$

d'où $(U_n + \sqrt{a})V_n = U_n - \sqrt{a}$

$\Rightarrow U_n V_n + \sqrt{a}\,V_n = U_n - \sqrt{a}$

$\Rightarrow U_n V_n - U_n = -\sqrt{a}\,V_n - \sqrt{a}$

$\Rightarrow (V_n - 1)U_n = -\sqrt{a}\,V_n - \sqrt{a}$

$\Rightarrow U_n = \dfrac{-\sqrt{a}\,V_n - \sqrt{a}}{V_n - 1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \dfrac{-\sqrt{a}}{-1} = \sqrt{a}$

Exercice n°7 : $\forall n \in \mathbb{N}, \; U_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$

1) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$\sum_{k=1}^{n} q^{k-1} = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = 1 \times \frac{1-q^n}{1-q}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} q^{k-1} = \frac{1-q^n}{1-q}$$

2) $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1-\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2}} = 2\left(1-\frac{1}{2^n}\right) = 2 - \frac{2}{2^n}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

3) $$\frac{1}{k!} \leqslant \frac{1}{2^{k-1}} \iff k! \geqslant 2^{k-1}$$
$$\iff k! - 2^{k-1} \geqslant 0$$

$$\cancel{2} \times 3 \times 4 \times 5 \times \dots \times k \iff k! \geqslant 0$$
$$- \; 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times \dots \times k-1$$
$$\overline{\quad 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times k \quad}$$

4) $U_{n+1} - U_n = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \frac{1}{n+1!} \geqslant 0$ Donc (U_n) est croissante

5) $$U_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} + 1$$
$$U_n \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} + 1$$
$$U_n \leqslant 2 - \frac{1}{2^{n-2}} + 1$$
$$U_n \leqslant 3 - \frac{1}{2^{n-2}} \leqslant 3$$

Croissante et majorée par 3
$\Rightarrow$ convergente.

Déf: Soit $(U_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

On dit que (V_n) est une suite extraite de (U_n) si $(V_n) = (U_{\varphi(n)})$ avec $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictem- croissante

Ex 1: $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
$n \to 2n$
(U_{2n}) extraite de (U_n)

Ex 2: $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ~~st~~ $\nearrow\nearrow$
$n \to 2n+1$
(U_{2n+1}) extraite de (U_n)

Ex: $(U_{3n+1}) \to \varphi(n) = 3n+1$ ✓
$(U_{\sqrt{n}}) \to \varphi(n) = \sqrt{n} \notin \mathbb{N}$ ✗
$(U_{n^2-n}) \to \varphi(n) = n^2 - n$ pas $\nearrow\nearrow$: $\varphi(0) = 0 = \varphi(1)$ ✗
$(U_{\ln(n)}) \Rightarrow \varphi(n) = \ln(n) \notin \mathbb{N}$ ✗
$(U_{2n^2+n+1}) \to \varphi(n) = 2n^2+n+1$ ✓

Théorème 1: Si (U_n) converge vers ℓ, alors toute suites extraite de (U_n) converge vers ℓ.

Théorème 2: Si une suite extraite de (U_n) diverge alors (U_n) diverge

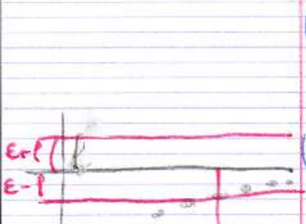
Ex: Mq $((-1)^n)$ diverge.
Par l'absurde, si (U_n) converge vers ℓ, alors toutes ~~suites~~ suites extraite de (U_n) CV vers ℓ. En particulier (U_{2n}) et (U_{2n+1})

or $U_{2n} = 1 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$

$U_{2n+1} = -1 \to -1$

Donc $1 = -1$ Absurde.

Rappels: Soit $((U_n), \ell) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}$



$U_n \to \ell \iff \forall \varepsilon > 0, \underbrace{\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N}_{\text{Il existe un rang à partir duquel}} \Rightarrow |U_n - \ell| < \varepsilon$

$\ell - \varepsilon \leq U_n < \ell + \varepsilon$ cad $|U_n - \ell| < \varepsilon$

Théorème 2, Exos 8 :

ADJ $U_n \to \ell \iff \begin{cases} U_{2n} \to \ell \\ U_{2n+1} \to \ell \end{cases}$

$\boxed{\Rightarrow}$ (H) $U_n \to \ell$

ADJ $U_{2n} \to \ell$ et $U_{2n+1} \to \ell$

Si (U_n) CV vers ℓ alors toute suite extraite de (U_n) CV vers ℓ.
En particulier (U_{2n}) CV vers ℓ et (U_{2n+1}) CV vers ℓ.

$\boxed{\Leftarrow}$ (H) $U_{2n} \to \ell$ et $U_{2n+1} \to \ell$

ADJ $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $n \geq N \Rightarrow |U_n - \ell| < \varepsilon$

Soit $\varepsilon > 0$

$U_{2n} \to \ell$ d'où $\exists N_1 \in \mathbb{N}$ $\forall p \in \mathbb{N}$, $p \geq N_1 \overset{(*)}{\Longrightarrow} |U_{2p} - \ell| < \varepsilon$

$U_{2n+1} \to \ell$ d'où $\exists N_2 \in \mathbb{N}$ $\forall p \in \mathbb{N}$, $p \geq N_2 \underset{(**)}{\Longrightarrow} |U_{2p+1} - \ell| < \varepsilon$

Soit $N = \operatorname{Max}(2N_1, 2N_2 + 1)$

Soit $n \in \mathbb{N}$ tq $n \geq N$

1e cas : n pair càd $n = 2p$, $p \in \mathbb{N}$.

$n \geq N \Rightarrow n \geq 2N_1$, càd $2p \geq 2N_1$, d'où $p \geq N_1$

Par (*) $|U_{2p} - \ell| < \varepsilon$ càd $|U_n - \ell| < \varepsilon$

2e cas : n impair $n = 2p+1$, $p \in \mathbb{N}$

$n \geq N \Rightarrow n \geq 2N_2 + 1$ càd $2p+1 \geq 2N_2 + 1$

D'où $p \geq N_2$

Par (**) $|U_{2p+1} - \ell| < \varepsilon$ càd $|U_n - \ell| < \varepsilon$

Ainsi $\forall n \geq N$, $|U_n - \ell| < \varepsilon$.

CCL : (U_n) CV vers ℓ.

Exercice n°9

Soient : $(U_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

$\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ↗↗

$(V_n) = (U_{\varphi(n)})$ est extraite de (U_n)

Soit $\gamma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ↗↗

$(W_n) = (V_{\gamma(n)})$ est extraite de (V_n)

Question (W_n) est-elle extraite de (U_n) ?

On a $\forall n \in \mathbb{N}$

$W_n = U_{\varphi(\gamma(n))} = U_{(\varphi \circ \gamma(n))}$

or $\varphi \circ \gamma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est ↗↗ car la composée de 2 f° ↗↗ est ↗↗

CCL : (W_n) est extraite de (U_n)

Exercice n°10 :

(H) $\begin{cases} x_n = U_{2n} \longrightarrow \ell_1 \\ y_n = U_{2n+1} \longrightarrow \ell_2 \\ z_n = U_{5n} \longrightarrow \ell_3 \end{cases}$

* Soit $\varphi_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ↗↗

$n \to 5n$

$x_{\varphi_1(n)} = U_{2\varphi(n)} = U_{2\times 5n} = U_{10n}$

Ainsi (U_{10n}) est extraite de (x_n). Elle converge donc vers ℓ_1

* Soit $\varphi_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ↗↗

$n \to 2n$

$z_{\varphi_2(n)} = U_{5\times\varphi_2(n)} = U_{5\times 2n} = U_{10n}$

Donc (U_{10n}) est extraite de (z_n)

Ainsi elle converge vers ℓ_3.

D'où par unicité de la limite, $\boxed{\ell_1 = \ell_3}$

* Soit $\varphi_3 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$n \to 5n+2$

$y_{\varphi_3(n)} = U_{2\varphi_3(n)+1} = U_{2(5n+2)+1} = U_{10n+5}$

Ainsi (U_{10n+5}) est extraite de (y_n). Elle converge donc vers ℓ_2

* Soit $\varphi_4 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$n \to 2n+1$

$z_{\varphi_4(n)} = U_{5\varphi_4(n)} = U_{5(2n+1)} = U_{10n+5}$

Ainsi (U_{10n+5}) est extraite de (z_n) donc elle converge vers ℓ_3

25/01

Maths

Par unicité de la limite $\ell_2 = \ell_3$

CCL : $\ell_1 = \ell_2$ et $\ell_2 = \ell_3 \Rightarrow \ell_1 = \ell_3$

D'où (U_{2n}) et (U_{2n+1}) convergent vers une même limite

Donc (U_n) converge.

Exercice n° 11 : 1) $U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}$

$U_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}$

$U_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

$U_{2n} - U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$

$\sum_{k=n+1}^{2n} \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = n \times \frac{1}{2n}$

$\sum_{k=n+1}^{2n} \geqslant \frac{1}{2} \Longrightarrow U_{2n} - U_n \geqslant \frac{1}{2}$

2) Par l'absurde, supposons que (U_n) CV

Notons $\ell = \lim_{+\infty} U_n$

Comme (U_{2n}) est extraite de (U_n), (U_{2n}) CV aussi vers ℓ

Ainsi $\lim_{n \to +\infty} (U_{2n} - U_n) \geqslant \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \ell - \ell \geqslant \frac{1}{2}$

$= 0 \geqslant \frac{1}{2}$ Absurde

CCL : (U_n) DV

THM : Si (U_n) et (V_n) sont adjacentes alors elles CV vers une même limite ℓ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $U_n \leqslant U_{n+1} \leqslant \ell \leqslant V_{n+1} \leqslant V_n$

Exercice n°12 $\quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad U_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad V_n = U_n + \frac{1}{n\,n!}$

1) Monotonie de (U_n)

$$U_{n+1} - U_n = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!}$$

[blank]

* Monotonie de (V_n)

$$V_{n+1} - V_n = U_{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - U_n - \frac{1}{n\,n!}$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{n\,n!}$$

$$= \frac{n(n+1) + n - (n+1)^2}{(n+1)!\,n\,(n+1)} = \frac{n^2 + n + n - n^2 - 2n - 1}{(n+1)!\,n\,(n+1)}$$

$$= -\frac{1}{(n+1)!\,n\,(n+1)} \leq 0 \qquad (V_n) \text{ est } \searrow$$

* $V_n - U_n = \frac{1}{n\,n!} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \qquad$ CCL (U_n) et (V_n) adjacentes

2) Comme (U_n) et (V_n) sont adjacentes, elles cv vers une même limite $e \in \mathbb{R}$

ADJ $e \notin \mathbb{Q}$ càd e est irrationnel

Par l'absurde supposons $e \in \mathbb{Q}$

càd $\exists (a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ tq $e = \frac{a}{b}$ (Rq : $U_n \geq 0 \Rightarrow e \geq 0$)

Comme (U_n) et (V_n) sont adjacentes et en fait strictement monotones, on a

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad U_n < e < V_n$ càd $U_n < \frac{a}{b} < V_n$

Pour $n = b \quad U_b < \frac{a}{b} < V_b$

$\Rightarrow \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{b!} < \frac{a}{b} \leqslant \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{b!} + \frac{1}{bb!}$

$\Rightarrow \frac{N}{b!} < \frac{a}{b} < \frac{N}{b!} + \frac{1}{bb!}$ avec $N \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow N < \frac{ab!}{b} < N + \frac{1}{b}$

càd $N < a(b-1)! < N + \frac{1}{b} \leqslant N+1$

Ainsi $N < a(b-1)! < N+1$

D'où $a(b-1)!$ est un entier strictement compris entre 2 entiers consécutifs

Absurde

CCL : $e \notin \mathbb{Q}$

Exercice n°13 : $\forall n \geqslant 2 \quad U_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2(k+1)^2} \quad V_n = U_n + \frac{1}{3n^2}$

* Monotonie de (U_n)

$U_{n+1} - U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2(k+1)^2} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2(k+1)^2} = \frac{1}{n^2(n-1)^2} \geqslant 0$

$\Rightarrow (U_n) \nearrow$

* Monotonie de (V_n)

$V_{n+1} - V_n = U_{n+1} + \frac{1}{3(n+1)^2} - U_n + \frac{1}{3n^2} = \frac{1}{n^2(n-2)^2} + \frac{1}{3(n+1)^2} - \frac{1}{3n^2}$

* $V_n - U_n = \frac{1}{3n^2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Donc (U_n) et (V_n) adjacentes

Exercice n°14 : Considérons les 2 suites réelles (U_n) et (V_n) définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$U_n = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \quad \text{et} \quad V_n = U_n + \frac{1}{(4n+4)!}$$

Montrer que (U_n) et (V_n) sont adjacentes.

Monotonie de (U_n) :

$$U_{n+1} - U_n = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{(2k)!} + \frac{(-1)^{2n+3}}{(4n+4)!} - \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{(2k)!}$$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{(-1)^{2n+3}}{(2(2n+3))!} + \frac{(-1)^{2n+2}}{(2(2n+2))!} = \frac{1}{(4n+4)!} - \frac{1}{(4n+6)!} \geq 0$$

car $(4n+4)! \leq (4n+6)!$

$\Rightarrow (U_n) \nearrow$

Monotonie de (V_n)

$$V_{n+1} - V_n = U_{n+1} + \frac{1}{(4(n+1)+4)!} - U_n - \frac{1}{(4n+4)!}$$

$$V_{n+1} - V_n = \cancel{\frac{1}{(4n+4)!}} - \cancel{\frac{1}{(4n+4)!}} - \frac{1}{(4n+6)!} + \frac{1}{(4n+8)!}$$

$$V_{n+1} - V_n = \frac{-1}{(4n+6)!} + \frac{1}{(4n+8)!} \leq 0, \quad (V_n) \searrow$$

* $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n - U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{(4n+4)!} = 0$

CCL : (U_n) et (V_n) adjacente.

Exercice n°15

Soient $(U_n)_{n\geq 1}$ et $(V_n)_{n\geq 1}$ définies $\forall n \geq 1$ par

$$U_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \quad \text{et} \quad V_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n-1}$$

Montrer que (U_n) et (V_n) sont adjacentes.

$$U_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \quad ; \quad V_n = \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k}$$

$$U_n = \sum_{k=n+1}^{2n-1} \frac{1}{k} + \frac{1}{2n}$$

$$V_n = \sum_{k=n+1}^{2n-1} \frac{1}{k} + \frac{1}{n}$$

Monotonie de (U_n)

$$U_{n+1} - U_n = \sum_{k=n+2}^{2n+2} \frac{1}{k} - \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} > 0$$

$(U_n) \nearrow$

* Monotonie de (V_n)

$$V_{n+1} - V_n = \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n} - \dots - \frac{1}{2n-1}$$

$$= \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n} \leq 0$$

$\Rightarrow (V_n) \searrow$

* $V_n - U_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

CCL : (U_n) et (V_n) adjacentes

Maths

29/01

En pratique : $V_n \neq 0$

$U_n = o(V_n) \Longleftrightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{U_n}{V_n} = 0$

$\Longrightarrow$ Pour n grand

$U_n = V_n \varepsilon_n$ avec $\varepsilon_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Ex : $n = o(n^2)$

$\frac{1}{n^2} = o\left(\frac{1}{n}\right)$

Au $\mathcal{V}(0)$

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$

$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$

$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$

$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + o(x^2)$

$a^x = e^{x \ln(a)}$.

Exercice n°16

1) Déterminer un DL au voisinage de $+\infty$ de l'ordre 4 de $\sin^2\left(\frac{1}{n}\right)$

2) Déterminer un DL au voisinage de $+\infty$ à l'ordre 2 de $\left(1 + \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{\frac{1}{n}}$

3) Déterminer un DL au voisinage de $+\infty$ à l'ordre 3 de $\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{\sin(1/n)}$

1) $\sin^2\left(\frac{1}{n}\right) = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)^2$

$= \frac{1}{n^2} - \frac{2}{6n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)$

$\sin^2\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{3n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)$.

2)

$(1+\sin(\frac{1}{n}))^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\ln(1+\sin(\frac{1}{n}))}$

$e^{\frac{1}{n}\ln(1+\sin(\frac{1}{n}))} = 1 + (\frac{1}{n}\ln(1+\sin(\frac{1}{n}))) + \frac{(\frac{1}{n}\ln(1+\sin(\frac{1}{n})))^2}{2} + o(x^2)$

$\ln(1+\sin(\frac{1}{n})) = 1+\sin(\frac{1}{n}) - \frac{(1+\sin(\frac{1}{n}))^2}{2} + o(x^2)$

$\sin(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n} + o(x^2)$

$\ln(1+\sin(\frac{1}{n})) = 1 + \frac{1}{n} + o(x^2) - \frac{(\frac{1}{n}+o(x^2))^2}{2} + o(x^2)$

$e^{\frac{1}{n}\ln(1+\sin(\frac{1}{n}))} = 1 + \frac{1}{n}(\cancel{1} + \frac{1}{n} + o(x^2) - \frac{(\frac{1}{n}+(o x^2))^2}{2} + o(x^2)) + o(x^2)$

3) $(\cos(\frac{1}{n}))^{\sin(\frac{1}{n})} = (1-\frac{1}{2n^2}+o(\frac{1}{n^2}))^{\sin(\frac{1}{n})}$

$= e^{\sin(\frac{1}{n}) \times \ln(1-\frac{1}{2n^2}+o(\frac{1}{n^3}))}$

$= e^{(\frac{1}{n}-\frac{1}{6n^3}+o(\frac{1}{n^3})) \times (\frac{-1}{2n^2}+o(\frac{1}{n^3}))}$

$= e^{(\frac{-1}{2n^3}+o(\frac{1}{n^3}))} = 1-\frac{1}{2n^3}+o(\frac{1}{n^3}).$

$\ln(1+\cos(\frac{1}{n})) = \ln(1+1-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{24n^4}+o(\frac{1}{n^4}))$

$= \ln(2-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{24n^4}+o(\frac{1}{n^4}))$

$= \ln(2(1-\frac{1}{4n^2}+\frac{1}{48n^4}+o(\frac{1}{n^4})))$

$= \ln(2) + \ln(1-\frac{1}{4n^2}+\frac{1}{48n^4}+o(\frac{1}{n^4}))$

$= \ln 2 - \frac{1}{4n^2} + \frac{1}{48n^4} - \frac{1}{32n^4} + o(\frac{1}{n^4})$

$\ln 2 + \frac{1}{n^4} - \frac{1}{96n^4} + o(\frac{1}{n^4}).$

Exercice n°14 : Considérons les 2 suites réelles (U_n) et (V_n) définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$U_n = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \quad \text{et} \quad V_n = U_n + \frac{1}{(4n+4)!}$$

Montrer que (U_n) et (V_n) sont adjacentes.

Monotonie de (U_n) :

$$U_{n+1} - U_n = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{(2k)!} + \frac{(-1)^{2n+3}}{(4n+4)!} - \sum_{k=0}^{2a+1} \frac{(-1)^k}{(2k)!}$$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{(-1)^{2n+3}}{(2(2n+3))!} + \frac{(-1)^{2n+2}}{(2(2n+2))!} = \frac{1}{(4n+4)!} - \frac{1}{(4n+6)!} \geq 0$$

car $(4n+4)! \leq (4n+6)!$

$\Rightarrow (U_n) \nearrow$

Monotonie de (V_n)

$$V_{n+1} - V_n = U_{n+1} + \frac{1}{(4(n+1)+4)!} - U_n - \frac{1}{(4n+4)!}$$

$$V_{n+1} - V_n = \cancel{\frac{1}{(4n+4)!}} - \cancel{\frac{1}{(4n+4)!}} - \frac{1}{(4n+6)!} + \frac{1}{(4n+8)!}$$

$$V_{n+1} - V_n = \frac{-1}{(4n+6)!} + \frac{1}{(4n+8)!} \leq 0 \text{ , } (V_n) \searrow$$

* $\lim_{n\to+\infty} V_n - U_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(4n+4)!} = 0$

CCL : (U_n) et (V_n) adjacente.

Exercice n°15

Soient $(U_n)_{n\geq 1}$ et $(V_n)_{n\geq 1}$ définies $\forall n \geq 1$ par

$$U_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \quad \text{et} \quad V_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n-1}$$

Montrer que (U_n) et (V_n) sont adjacentes.

$$U_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \; ; \; V_n = \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k}$$

$$U_n = \sum_{k=n+1}^{2n-1} \frac{1}{k} + \frac{1}{2n}$$

$$V_n = \sum_{k=n+1}^{2n-1} \frac{1}{k} + \frac{1}{n}$$

Monotonie de (U_n)

$$U_{n+1} - U_n = \sum_{k=n+2}^{2n+2} \frac{1}{k} - \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}.$$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} > 0$$

$(U_n) \nearrow$

* Monotonie de (V_n)

$$V_{n+1} - V_n = \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n} - \dots - \frac{1}{2n-1}$$

$$= \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n} \leq 0$$

$\Rightarrow (V_n) \searrow$

* $V_n - U_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

CCL : (U_n) et (V_n) adjacentes