Algèbre linéaire I

Exercice n°1

1) (+) $\mathbb{C} * \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$(z, z') \to (z + z' \in \mathbb{C})$

(*) $\mathbb{R} \to \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$(\lambda, z) \to (\lambda z) \in \mathbb{C}$

($\emptyset$) $0 \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow$ Donc $\mathbb{C}$ - ~~sev~~. D'après le thm, $\mathbb{C}$ espace vect.

2) (+) $\mathbb{R} \times \mathbb{Q} \not\to \mathbb{Q}$

$(\pi, \frac{1}{1}) \to \pi \notin \mathbb{Q}$

3) $A = \{P \in \mathbb{R}[X], d°(P) = 694\}$

$0_{\mathbb{R}[x]} \notin A$ d'où A n'est pas un sev

$\to$ A n'est pas un $\mathbb{R}$-ev

4) $B = \{P \in \mathbb{R}[x], d°(P) \geq 496\}$

$0_{\mathbb{R}[x]} \notin B$ d'où B n'est pas un sev

$\Rightarrow$ B n'est pas un $\mathbb{R}$-ev

5) $C = \{P \in \mathbb{R}[x], d°(P) \leq 64\}$

$0_{\mathbb{R}[x]} \in C$

Soient $(P_1, P_2) \in C^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

AD) $\lambda P_1 + P_2 \in C$

On a $d°(\lambda P_1 + P_2) \leq \mathrm{Max}(d°(P_1), d°(P_2)) \leq 64$

$\Rightarrow \lambda P_1 + P_2 \in P$

⑥ $D = \{P \in \mathbb{R}[X], P' = 0\}$

$d(O_E) = O_E \in P$

Donc $D \subset E$ et $D \neq \emptyset$

Soient $(P_1, P_2) \in D^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$d°(\lambda P_1 + P_2) \leq Max(d°(P_1), d°(P_2)) = 1$ car $d°(P') = 0$

⑥ $D = \{P \in \mathbb{R}[X], P' = 0\}$

* $D \subset \mathbb{R}[X]$ par définition de D
* $O'_{\mathbb{R}[X]} = O_{\mathbb{R}[X]}$ d'où $O_{\mathbb{R}[X]} \in D$

Ainsi $D \neq \emptyset$.

* Soient $(P_1, P_2) \in D^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

MQ $P = \lambda P_1 + P_2 \in D$, $P' = 0$

$P' = (\lambda P_1 + P_2)' = \lambda P_1' + P_2' = \lambda 0 + 0 = 0$

$\Rightarrow \lambda P_1 + P_2 \in D$

$\therefore$ D est un sev de $\mathbb{R}[X]$ et donc D est un $\mathbb{R}$-ev

⑦ $E = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, f \text{ croissante}\}$

Par l'absurde, si E est un $\mathbb{R}$ ev

$\forall f \in E$ et $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda f \in E$

Or pour $\lambda = -1$, $-f$ est décroissante

D'où $-f \notin E$ Absurde

Donc E n'est pas un $\mathbb{R}$ev.

8) $F = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, f(0) = 0\}$

$F \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ par définition de F

Donc $F \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ et $F \neq \emptyset$ car $O_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}} \in F$

Soit $(f, g) \in F^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$G = \lambda f + g \in F$

$G(0) = \lambda f(0) + g(0) = \lambda 0 + 0 = 0 \in F$

Donc F est un sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

Par le thm F est un $\mathbb{R}$-ev

9) $G = \{ f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}},\ f \text{ paire} \}$

* f paire $\Rightarrow f(-x) = f(x)$

$G \subset \mathbb{R}$ par définition de G

* $0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}} \in G$ car $f(x) = f(-x) = 0$ pour la f° nulle

Donc $G \neq \emptyset$.

* Soient $(g, h) \in G^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$. $\forall x$ fixé :

$g(x) = g(-x) \Leftrightarrow \lambda g(x) = \lambda g(-x) \Leftrightarrow \lambda g(x) + h(x) = \lambda g(-x) + h(-x)$

Donc G est sev. Par le thm ; G est un $\mathbb{R}$-ev

10) $H = \{ f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}\ \lim_{+\infty} f = +\infty \}$

$\lim_{x \to +\infty} 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}} = 0 \neq +\infty$ d'où $0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}} \notin H$

Donc H n'est pas un sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

Rappels : f C^0 sur $\mathbb{R}$ si $\forall a \in \mathbb{R}$, f C^0 en a

f C^0 en a si $\lim_a f = f(a)$

$\lim_a f = l$, $\lim_a g = l' \Rightarrow \lim_a \lambda f + g = \lambda l + l'$

11) $I = \{ f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}},\ f\ C^0 \}$

$I \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ par définition

$0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}$ C^0 donc $0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}} \in I$, d'où $I \neq \emptyset$

Soient $(f_1, f_2) \in I^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$ ADJ $\lambda f_1 + f_2 \in I$

Soit $a \in \mathbb{R}$

$\lim_a f_1 = f_1(a)$ car f_1 C^0

$\lim_a f_2 = f_2(a)$ car f_2 C^0

Ainsi

$\lim_a \lambda f_1 + f_2 = \lambda f_1(a) + f_2(a) = (\lambda f_1 + f_2)(a)$

$\Rightarrow \lambda f_1 + f_2$ C^0 sur $\mathbb{R}$

CCL : I sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ donc I est un $\mathbb{R}$-ev

8/02
Maths

$E : \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R}) = \{ f [a,b] \to \mathbb{R}, \mathcal{C}^0 \}$
E est un $\mathbb{R}$-ev par 11)

12) $J = \{ f \in E$ tq $\int_a^b f(t)dt = 0 \}$

* $J \subset E$ par définition
* $\int_a^b 0_E \, dt = 0$ donc $0_E \in J$ d'où $J \neq \emptyset$

* Soient $(f_1, f_2) \in J^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ AD) $g = \lambda f_1 + f_2 \in J$

$$\int_a^b g(t)dt = \int_a^b (\lambda f_1 + f_2)(t)\, dt$$
$$= \int_a^b \lambda f_1(t) + f_2(t)\, dt$$

$$= \lambda \int_a^b f_1(t)\, dt + \int_a^b f_2(t)\, dt$$
$$= \lambda \times 0 + 0 = 0$$

Donc $g = \lambda f_1 + f_2 \in J$
CCL : J sev de E. Donc J est un $\mathbb{R}$-ev.

13) $K = \{ (U_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, (U_n)$ convergente $\}$
* $K \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ par définition
* $\lim_{n \to +\infty} 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} = 0$ donc $0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \in J$ d'où $J \neq \emptyset$

* Soient $(v, w) \in K^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ AD) $\lambda v + w \in K$

$\exists (l, l') \in \mathbb{R}^2$ tq $\begin{cases} \lim_{n \to +\infty} v = l \in \mathbb{R} \\ \lim_{n \to +\infty} w = l' \in \mathbb{R} \end{cases}$

$\lim_{n \to +\infty} \lambda v = \lambda l$ et $\lim_{n \to +\infty} \lambda v + w = \lambda l + l' \in \mathbb{R}$

Donc $\lambda v + w \in K$

$\Rightarrow$ K est un sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, K est un $\mathbb{R}$-ev

14) $L = \{(U_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, (U_n) \text{ divergente}\}$

$* \lim_{+\infty} 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} = 0 \in \mathbb{R}$, donc $0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \notin L$

Donc L n'est pas un sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

15) $M = \{(U_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, U_{n+2} = 2U_{n+1} - U_n\}$

$*$ $M \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ par définition

$*$ $0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} = 0 \ \forall n$

$0_{n+2} = 0$; $20_{n+1} = 0$; $-0_n = 0$

D'où $0 = 20 - 0 = 0 \in M$

Donc $0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \in M$ d'où $M \neq \emptyset$

$*$ Soient $((U_n),(V_n)) \in M^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

AD) $(W_n) = \lambda(U_n) + (V_n)$

$(W_n) = (\lambda U_n + V_n) \in M^2$

$(W_{n+2}) = 2W_{n+1} - W_n$

$W_{n+2} = \lambda U_{n+2} + V_{n+2}$

$W_{n+2} = \lambda(2U_{n+1} - U_n) + 2V_{n+1} - V_n$

$W_{n+2} = 2(\lambda U_{n+1} + V_{n+1}) - (\lambda U_n + V_n)$

$W_{n+2} = 2W_{n+1} - W_n$

$\Rightarrow (W_n) \in M$

Donc M un sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, donc M est un $\mathbb{R}$-ev

3/02
maths

16) $N = \{(U_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, U_{n+2} = 2U_{n+1} - U_n^2$

Soit (U_n) tq $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = 1$
$U_{n+2} = 1$ et $2U_{n+1} - U_n^2 = 2 \times 1 - 1^2 = 1$
$\Rightarrow (U_n) \in M$.
Soit (V_n) tq $\forall n \in \mathbb{N}$ $V_n = 3$
$V_{n+2} = 3$ et $2V_{n+1} - V_n^2 = 2 \times 3 - 3^2 = -3 \neq V_{n+2}$
$\Rightarrow (V_n) \notin N$
CCL : N n'est pas un sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

17 → $\mathbb{R}^3$ est le $\mathbb{R}$-ev de référence.
$0_{\mathbb{R}^3} = (0,0,0)$

(7) $O = \{u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x+y+z = 0\}$

$O \subset \mathbb{R}^3$ par définition de $\mathbb{R}^3$
$0_{\mathbb{R}^3} \in O$ d'où $O \neq \emptyset$

Soient $(u,v) \in O^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ ADJ $\lambda u + v \in O$

$u = (x,y,z)$ tq $x+y+z = 0 \Rightarrow \lambda u = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$ où $\lambda x + \lambda y + \lambda z = \lambda 0 = 0$
$v = (x',y',z')$ tq $x'+y'+z' = 0$

$\lambda u + v \Rightarrow (\lambda x + \lambda y + \lambda z) + (x'+y'+z') = \lambda 0 + 0 = 0$

Soient $(u = (x,y,z); v = (x',y',z')) \in O^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$
ADJ $\lambda u + v \in O$
On a $(\lambda x + x') + (\lambda y + y') + (\lambda z + z')$
$= \lambda(x+y+z) + (x'+y'+z') = \lambda 0 + 0 = 0$
$\Rightarrow \lambda u + v \in O$
CCL : O sev de $\mathbb{R}^3$ donc un $\mathbb{R}$-ev

18) $P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x+y+z=1\}$

$0_{\mathbb{R}^3} = (0,0,0)$, or $0+0+0=0 \neq 1$
Donc $0_{\mathbb{R}^3} \notin P$.
$\Rightarrow$ P n'est ~~un~~ pas un sev de $\mathbb{R}^3$

19) $Q = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ; x \cdot y = 0\}$
* $Q \subset \mathbb{R}^3$
* $0_{\mathbb{R}^3} = (0,0,0)$, $0 \times 0 = 0$ donc $0_{\mathbb{R}^3} \in Q$
* Soient $(u=(x,y,z), v=(x',y',z')) \in Q^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

AD) $\lambda u + v \in Q$

Pour $u = (1,0,0)$ $v = (0,1,0) \in Q$

mais $u+v = (0+1, 1+0, 0+0) = (1,1,0)$ et $1 \times 1 = 1 \neq 0$

Donc Q n'est pas un sev de $\mathbb{R}^3$

20) $R = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ; x^2 = z^2\}$
* $R \subset \mathbb{R}^3$
* $0_{\mathbb{R}^3}$ $(0,0,0) \in R$ car $0^2 = 0^2$
* Soient $(u=(x,y,z) ; v=(x',y',z')) \in R^2$

Cexemple : $u = (-5, 0, 5) \in R$

$v = (2, 42, 2) \in R$

$u+v = (-3, 42, 7) \notin R$

$\Rightarrow$ R n'est pas un sev de $\mathbb{R}^3$

8/02
Maths

Ex : 1,5 : Soient E un $\mathbb{R}$-ev, F et G 2 sev de E

1) Mq $F \cap G$ est un sev de E

2) $F \cup G$?

1) * $F \cap G = \{ u \in E$ tq $u \in F$ et $u \in G \}$

* $0_E \in F$ et $0_E \in G$ car F et G sev de E

Ainsi $0_E \in F \cap G$. D'où $F \cap G \neq \emptyset$

* Soient $(u,v) \in (F \cap G)^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$

AD) $\lambda u + v \in F \cap G$

On a $(u,v) \in F^2$ or F sev de E d'où $\lambda u + v \in F$

et on a $(u,v) \in G^2$ or G sev de E d'où $\lambda u + v \in G$

Donc $\lambda u + v \in F \cap G$

CCL : $F \cap G$, sev de E

2) Faux pour $F \cup G$

Ex) $E = \mathbb{R}^2$

$F = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2, x = 0 \}$ sev de $\mathbb{R}^2$

$G = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2, y = 0 \}$

Pour $u = (0,1) \in F \subset F \cup G$

$v = (1,0) \in G \subset F \cup G$

$u + v = (1,1) \notin F$ et $\notin G$

$\Rightarrow u + v \in F \cup G$

Ex2 : (H) E un $\mathbb{R}$-ev, F, G sev de E

AD) $F \cup G$ sev de E $\Leftrightarrow F \subset G$ ou $G \subset F$

$\boxed{\Leftarrow}$ (H) $F \subset G$ ou $G \subset F$

Si $F \subset G$ alors $F \cup G = G$ or G sev de E d'où $F \cup G$ sev de E

Si $G \subset F$ alors $F \cup G = F$ sev de E

$\boxed{\Rightarrow}$ (H) $F \cup G$ sev de E

$\Leftarrow$ (H) $F\cup G$ sev de E

ADJ $F\subset G$ ou $G\subset F$

Par l'absurde, supposons $F\not\subset G$ et $G\not\subset F$

càd $\exists u\in F$ et $u\notin G$

$\exists v\in G$ et $v\notin F$

On a $u\in F\cup G$ et $v\in F\cup G$

Ainsi par (H) $u+v\in F\cup G$

càd $u+v\in F$ ou $u+v\in G$

1er cas: $u+v\in F$

$u\in F$ or F sev de E

d'où $(u+v)-u\in F$ càd $v\in F$. Absurde

2e cas: $u+v\in G$ or G sev de E

$u+v-v\in G$ càd $u\in G$ Absurde

CCL: $F\subset G$ ou $G\subset F$

Exercice n°3:

$F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ x-y-z=0\}$

$G=\{(a+b,a,a+3b);\ (a,b)\in\mathbb{R}^2\}$

1). $F\subset\mathbb{R}^3$ et $0_{\mathbb{R}^3}\in F$ d'où $F\neq\emptyset$

. Soient $(u=(x,y,z);\ v=(x',y',z'))\in F^2$ et $\lambda\in\mathbb{R}$

ADJ $\lambda u+v\in F$

On a $\lambda u+v=(\lambda x+x',\lambda y+y',\lambda z+z')$

et $(\lambda x+x')-(\lambda y+y')-(\lambda z+z')=$

$\lambda(x-y-z)+(x'-y'-z')=\lambda 0+0=0$

CCL: F sev de $\mathbb{R}^3$ donc F est un $\mathbb{R}$-ev

. $G\subset\mathbb{R}^3$ et $0_{\mathbb{R}^3}\in G$ d'où $G\neq\emptyset$

. Soient $u=(a+b,a,a+3b)\in G$ avec a,b réels

$v=(a'+b',a',a'+3b')\in G$ avec a',b' réels

$\lambda\in\mathbb{R}$

2102
Maths

$\lambda u + v = (\lambda(a+b) + a' + b', \lambda a + a', \lambda(a+3b) + a' + 3b')$

$= (\underbrace{(\lambda a + a')}_{a''} + \underbrace{(\lambda b + b')}_{b''}, \lambda a + a', (\lambda a + a') + 3(\lambda b + b'))$

$= (a'' + b'', a'', a'' + 3b'')$ avec a'' et b'' réels

$\Rightarrow \lambda u + v \in G$

CCL : G sev de $\mathbb{R}^3$ donc G est un $\mathbb{R}$-ev

Ex3 : $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x - y - z = 0\}$

$G = \{u = (a+b, a, a+3b), (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$

2) Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$u \in F \cap G \Leftrightarrow u \in F$ et $u \in G$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y - z = 0 \\ x = a + b \\ y = a \\ z = a + 3b \end{cases}$

$x - y - z = 0$

$\Rightarrow a + b - a - a - 3b = 0$

$\Rightarrow a = -2b$

$x = -b$

$y = -2b$

$z = b$

$u \in F \cap G \Leftrightarrow u = (-b, -2b, b) = b(-1, -2, 1)$

CCL : $F \cap G = \{b(-1, -2, 1), b \in \mathbb{R}\}$

$\Rightarrow$ Droite passant par O, dirigée par $u = (-1, -2, 1)$

Exercice n°4:

Soient E un $\mathbb{R}$-ev et F, G, H 3 sev de E tels que $F \oplus G = E$ et $F \oplus H = E$. Peut on en conclure que $G = H$.

$F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x=y\}$

$G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x=0\}$

$H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x=-y\}$

* On a $F \oplus G = \mathbb{R}^2$ car $F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$ et on a déjà montré que $F + G = \mathbb{R}^2$

* Montrons que $F \oplus H = \mathbb{R}^2$

$\to F \cap H = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$

$\to F + H = \mathbb{R}^2$

$\boxed{\subset}$ Ok, car $F + H$ sev de $\mathbb{R}^2$

$\boxed{\supset}$ Soit $u = (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$u = (x,y) = \underbrace{\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}\right)}_{\in F} + \underbrace{\left(\frac{x-y}{2}, \frac{y-x}{2}\right)}_{\in H}$$

$u \in F + H$

Brouillon $u = (x,y) = \underbrace{(a,a)}_{\in F} + \underbrace{(b,-b)}_{\in H}$

$x = a + b$

$y = a - b \quad a = \frac{x+y}{2} \quad b = \frac{x-y}{2}$

CCL: $F \oplus G = \mathbb{R}^2$, $F \oplus H = \mathbb{R}^2$ et $G \neq H$.

Maths

12/2

Exercice n°7 : $E = \mathbb{R}^3$

$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x - y + z = 0\}$

$G = \{(x,x,x),\ x \in \mathbb{R}\}$

AD₁) $F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$

AD₂) $F + G = \mathbb{R}^3$

Vas direct / Au moins 1ère ligne + dernière.

1) $\boxed{\supset}$ Ok car $F \cap G$ sev de $\mathbb{R}^3$ d'où $0_{\mathbb{R}^3} = F \cap G$

$\boxed{\subset}$

Ainsi $x - y + z = 0$ et $x = y = z$

D'où $x - x + x = 0$ cad $x = 0$

$\rightarrow x = y = z = 0$

D'où $v = 0_{\mathbb{R}^3}$

2) $\boxed{\subset}$ Ok par def de $F+G$

$\boxed{\supset}$ Soit $v = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$v = (x,y,z) = \underbrace{(\_,\_,\_)}_{\in F} + \underbrace{(\ ,\ ,\ )}_{\in G}$

$\Rightarrow v \in F + G$

$v = (x,y,z) = \underbrace{(b, c, c-b)}_{\in F} + \underbrace{(a,a,a)}_{\in G}$ (Système à résoudre)

$\begin{cases} x = b + a \\ y = c + a \\ z = c - b + a \end{cases}$ $\begin{cases} a = x - b \\ a = y - c \\ a = z - c + b \end{cases}$

$3a = x - \cancel{b} + y - c + z - c + \cancel{b}$

$3a = x + y + z - 2c$

$3a = x + y + z - 2(y - a)$

$3a = x + y + z - 2y + 2a$

$a = x - y + z$

$a = x - y + z$ $\quad b = x - a$ $\quad c = y - a$

$b = y - z$ $\quad b = \cancel{x} - \cancel{x} + y - z$ $\quad c = y - x + y - z$

$c = -x + 2y - z$ $\quad b = y - z$ $\quad c = -x + 2y - z$

D'où $v = (x,y,z) = (y - z, -x + 2y - z, y - x) + (x - y + z, x - y + z, x - y + z)$

- On a $u_2 \in G$
- $(y-z) - (-x+2y-z) + (y-x)$
$= y - z + x - 2y + z + y - x = 0$
$\Rightarrow u_2 \in F$

Donc $v = \underbrace{u_2}_{\in F} + \underbrace{u_2}_{\in G} \in F + G$

Exercice n°8 :

$E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

$F = \{ f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}},\ f(0) = 0 \}$

$G = \{ f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}},\ \exists k \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = k$

1) Pour F cf-exos 1 :

* Montrons que G est un sev $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$
  - $G \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ par définition
  - $0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}} \in G$ d'où $G \neq \emptyset$
  - Soient $(f_1, f_2) \in G^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

    AD) $\lambda f_1 + f_2 \in G$

$\exists k_1 \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R},\ f_1(x) = k_1$

$\exists k_2 \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R},\ f_2(x) = k_2$

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}$

$(\lambda f_1 + f_2)(x) = \lambda f_1(x) + f_2(x)$
$= \lambda k_1 + k_2 \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \lambda f_1 + f_2$

CCL : G sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

* Montrons que $F \cap G = \{ 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}} \}$

$\boxed{\supset}$ Ok car $F \cap G$ sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

$\boxed{\subset}$ Soit $f \in F \cap G$ # 1ère ligne

Ainsi $f \in F$ et $f \in G$

$\exists k \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^*\ f(x) = k$

$k = 0$ if $x = 0$

$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$

$\Rightarrow f = 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}$ # Dernière ligne

Maths

12/02

②

A⊗2] $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = F + G$

⊃ Ok par déf de $F+G$

⊂ Soit $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, soit $x \in \mathbb{R}$

b/ $f(x) = f_1(x) + f_2(x) = f_1(x) + k$

$x=0$ $f(0) = f_1(0) + k = k = f_2(x)$.

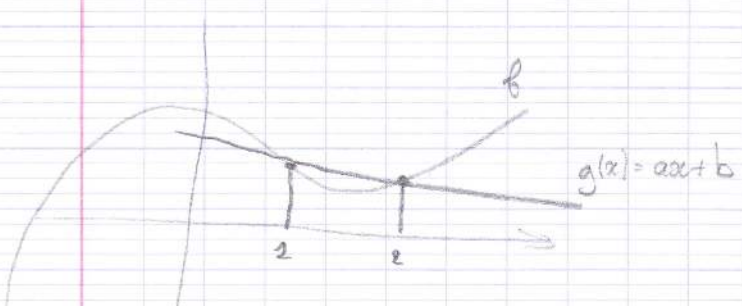
Soit $x \in \mathbb{R}$

$f(x) = \underbrace{f(x) - f(0)}_{= f_1(x)} + \underbrace{f(0)}_{= f_2(x)}$

* on a $f_2 \in G$
* $f_1(0) = f(0) - f(0) = 0$ d'où $f_1 \in F$

Ainsi $f = f_1 + f_2 \in F + G$.

Ex 9 : $F = \{ f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}},\ f(1) = f(2) = 0 \}$



$(f-g)(1) = 0$
$(f-g)(2) = 0$

$G = \{ f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}\ \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = ax + b \}$ sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

Montrons que $F \oplus G = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

A⊗2] $F \cap G = \{0_E\}$ Code de la boucle (double inclusion)

Partie $\supseteq$ vrai $\Leftarrow$ car sev.

$\boxed{\supset}$ Ok, car $F \cap G$ sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

$A \Rightarrow B$

Soit $f \in F \cap G$ (A)

Traduction

Ainsi $f \in F$ et $f \in G$

G $\left\{ f(x) = ax + b \quad \text{avec } (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right.$

Pour f F $\left\{ f(1) = a + b = 0 \text{ et } f(2) = 2a + b = 0 \right.$

$\begin{cases} a+b=0 \\ 2a+b=0 \end{cases} \quad \begin{cases} a=-b \\ -2b+b=0 \end{cases} \quad \begin{cases} a=0 \\ b=0 \end{cases}$

$\forall x \; f(x) = ax + b = 0x + 0 = 0$

$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$

$F \cap G = \{0_E\}$ (B)

A.2) $F + G = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ côté $\Rightarrow$ évident par déf.

$\boxed{\subset}$ ok car par définition de $F+G$

$\boxed{\supset}$ Soit $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

$f(x) = \underbrace{f(x) - f(0)}_{\text{ne s'annule pas forcément}} + \underbrace{f(0)}_{\text{pas affine}}$

On cherche une décomposition

Brouillon : $f(x) = \underbrace{f_1(x)}_{\in F} + \underbrace{f_2(x)}_{\in G}$ on explicite G

$f(x) = f_1(x) + ax + b$

le valeur de 1 et 2

$f(1) = f_1(1) + a + b$ $\qquad$ $f(2) = f_1(2) + 2a + b$

$f(1) = a + b$ $\qquad$ $f(2) = 2a + b$

2-1

$\begin{cases} f(1) = a+b \\ f(2) = 2a+b \end{cases} \quad \begin{cases} a = f(2) - f(1) \\ b = 2f(1) - f(2) \end{cases}$

$\Rightarrow f_2(x) = \underbrace{(f(2) - f(1))x + 2f(1) - f(2)}_{A}$

$f_1(x) = f(x) - A$

Maths
15/02

①

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \underbrace{f(x) - (f(2)-f(1))x - 2f(1) + f(2)}_{f_1(x)} + \underbrace{(f(2)-f(1))x + 2f(1) - f(2)}_{f_2(x)}$$

Bien de la forme $ax+b$

- On a $f_2 \in G$

Unicité de la décomposition

- $f_1(1) = f(1) - f(2) + f(1) - 2f(1) + f(2)$
  $= 0$
- $f_1(2) = f(2) - 2f(2) + 2f(1) - 2f(1) + f(2)$
  $= 0$ d'où $f_1 \in F$

Ainsi $f = f_1 + f_2 \in F+G$

ccl : $F+G$

Exercice n°10

0) Soient $A \subset E$ et $B \subset E$

Mq $A \subset B \Rightarrow \mathrm{Vect}(A) \subset \mathrm{Vect}(B)$

$A \subset B$ or $B \subset \mathrm{Vect}(B)$

D'où $A \subset \mathrm{Vect}(B)$

Ainsi $\mathrm{Vect}(B)$ est un sev de E qui contiennent A. Parmi eux, il y a le + petit d'entre eux : $\mathrm{Vect}(A)$

Ainsi $\mathrm{Vect}(A) \subset \mathrm{Vect}(B)$

0,5) Soient F, G, H 3 sev de E

Mq $F \subset H$ et $G \subset H \Rightarrow F+G \subset H$.

(H) $F \subset H$ et $G \subset H$

AD) $F+G \subset H$.

$\exists (u_1, v_2) \in F \times G$, $u = \underbrace{u_1}_{\in F \subset H} + \underbrace{v_2}_{\in G \subset H}$

$\Rightarrow u \in H$ car H sev de E.

1) Contexte E $\mathbb{R}$-ev, F et G sev de E

AD) $Vect(F \cup G) = F + G$

Egalité → Double inclusion

$\boxed{\supset}$ $F \subset F \cup G$ or $F \cup G \subset Vect(F \cup G)$

$\Rightarrow \underset{sev}{F} \subset \{Vect(F \cup G)\}$ H sev

De même $\underset{sev}{G} \subset Vect(F \cup G)$

Ainsi par O.S, $F + G \subset Vect(F \cup G)$

$\boxed{\subset}$ On a $F \cup G \subset F + G$ (*)

D'où $Vect(F \cup G) \subset Vect(F + G)$

or $F + G$ est un sev de E d'où $Vect(F + G) = F + G$

Ainsi $Vect(F \cup G) \subset F + G$

Justificatif d'(*) soit $u \in F \cup G$

$u \in F$ ou $u \in G$

si $u \in F$ alors $u = \underbrace{u}_{\in F} + \underbrace{0_E}_{\in G} \in F + G$

De même si $u \in G$

⚠ Thm ⚠

2) Soient $u_1, u_2, \dots, u_n \in E$ (n vecteur de E)

AD) $Vect(\{u_1, \dots, u_n\}) = \underbrace{\{\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n ; \forall i \in [\![1, n]\!], \lambda_i \in \mathbb{R}\}}_{\text{ensemble des combinaisons linéaires de } u_1, \dots, u_n}$

Ex : 1) $Vect(\{1, 1\}) = \{\lambda_1 (1, 1) ; \lambda_1 \in \mathbb{R}\}$

= droite passant par O et dirigée

par $u_1 = (1, 1)$

$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = x\}$

2) $E = \mathbb{R}$

$Vect(\{1\}) = \{\lambda . 1 , \lambda \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$

Maths
14/02

3) $E = \mathbb{C}$

$Vect(\{1, i\}) = \{\lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 i,\ \lambda_1 \in \mathbb{R} \text{ et } \lambda_2 \in \mathbb{R}\} = \mathbb{C}$

Preuve : AD) $\mathcal{L} = Vect(\{u_1, \dots, u_n\})$

Pour cela on va montrer que $\mathcal{L}$ est $\underbrace{\text{le plus petit}}_{③}$ $\underbrace{\text{sev. de } E}_{①}$ $\underbrace{\text{qui contient } \{u_1, \dots, u_n\}}_{②}$

① $\mathcal{L} \subset E$ et $0_E = 0u_1 + \dots + 0u_n \in \mathcal{L}$ d'où $\mathcal{L} \neq \emptyset$.

Soient $u = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n \in \mathcal{L}$

$v = \mu_1 u_1 + \dots + \mu_n u_n \in \mathcal{L}$

$\alpha \in \mathbb{R}$.

On a $\alpha u + v = (\alpha\lambda_1 + \mu_1) u_1 + \dots + (\alpha\lambda_n + \mu_n) u_n$

$\Rightarrow \alpha u + v \in \mathcal{L}$

Donc $\mathcal{L}$ sev de E

② $u_1 = 1u_1 + 0u_2 + \dots + 0u_n \in \mathcal{L}$ etc...

$\Rightarrow \forall i \in [\![1, n]\!]\ u_i \in \mathcal{L}$ d'où $\{u_1 \dots u_n\} \subset \mathcal{L}$.

③ Soit F un des sev de E tq $\{u_1, \dots u_n\} \subset F$

AD) $\mathcal{L} \subset F$

Soit $u \in \mathcal{L}$

$u = \lambda_1 \underbrace{u_1}_{\in F} + \dots + \lambda_n \underbrace{u_n}_{\in F}$ avec $\forall i \in [\![1, n]\!], \lambda_i \in \mathbb{R}$

D'où $u \in F$ car F sev de E

Exercice n° 11

0) $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x + 2y = 0\}$
$= \{(-2y, y);\ y \in \mathbb{R}\}$
$= \{y(-2; 1);\ y \in \mathbb{R}\}$
$= Vect(\{(-2, 1)\})$

0,5) $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ 2x - y + z = 0\}$
$= \{(x, y, -2x + y);\ x \in \mathbb{R}\ y \in \mathbb{R}\}$
$= \{\underbrace{x}_{\lambda_1} \underbrace{(1, 0, -2)}_{v_1} + \underbrace{y}_{\lambda_2} \underbrace{(0, 1, 1)}_{v_2};\ (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$
$= Vect(\{(1, 0, -2), (0, 1, 1)\})$

1) $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y ; z = 0\}$
$= \{(x,x,0) \in \mathbb{R}^3 , x \in \mathbb{R}\}$
$= \{x(1,1,0) , x \in \mathbb{R}\}$
$= \mathrm{Vect}(\{(1,1,0)\})$

2) $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y\}$
$= \{(x,x,z) \in \mathbb{R}^3 (x,z) \in \mathbb{R}^2\}$
$= \{x(1,1,0) + z(0,0,1) ; (x,z) \in \mathbb{R}^2\}$
$= \mathrm{Vect}(\{(1,1,0),(0,0,1)\})$

3) $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = z\}$
$= \{(x,x,x) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{R}\}$
$= \{x(1,1,1) \mid x \in \mathbb{R}\}$
$= \mathrm{Vect}(\{(1,1,1)\})$

4) $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y = 0$ et $x+z = 0\}$
$= \{(x,-x,-x) \mid x \in \mathbb{R}\}$
$y - z - x - z + y - x$ $= \{x(1,-1,-1) \mid x \in \mathbb{R}\}$
$= \mathrm{Vect}(\{(1,-1,-1)\})$

On fixe x et y et on trouve z

5) $I = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\}$
$= \{(x, y, y-x) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\}$
$= \{x(1,0,-1) + y(0,1,1) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$
$= \mathrm{Vect}(\{(1,0,-1),(0,1,1)\})$

$3x + 2y + 3x = 0$
$6x + 2y = 0$

6) $J = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - z = 0$ et $3x + 2y + 3z = 0\}$
$J = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = z$ et $y = -3x\}$
$J = \{(x,-3x,x,t) , (x,t) \in \mathbb{R}^2\}$
$= \{x(1,-3,1,0) + t(0,0,0,1) \mid (x,t) \in \mathbb{R}^2\}$
$= \mathrm{Vect}(\{(1,-3,1,0),(0,0,0,1)\})$

Maths
14/02

7) $\begin{cases} x+y+t=0 \\ x-u+t=0 \\ y+z+u=0 \\ 2y+z+t=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x+y+t=0 \\ y=-u \\ z=0 \\ 2y+t=0 \end{cases}$

$y=-u$
$z=0$
$t=-2y=2u$
$x=-y-t=u-2u=-u$

$K=\{(-u,-u,0,2u,u)\in\mathbb{R}^4 ; u\in\mathbb{R}\}$
$=\{u(-1,-1,0,2,1) \mid u\in\mathbb{R}\}$
$=\mathrm{Vect}(\{(-1,-1,0,2,1)\})$.

Programme révision Contrôle :
→ Suites
→ Espace vectoriel (Exos 1, 2, 3, → 14)
→ Calcul Intégrale

Exercice n°6 : Soient $u_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$; $u_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$; $u_3=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$; $u_4=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}$.

Methodo

$F=\mathrm{Vect}(\{u_1,u_2\})$; $G=\mathrm{Vect}(\{u_3,u_4\})$.
$=\{\alpha u_1+\beta u_2 \mid (\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2\}$ $=\{\gamma u_3+\delta u_4 \mid (\gamma,\delta)\in\mathbb{R}^2\}$

$F=\left\{\begin{pmatrix}\alpha\\0\\\beta\\\alpha\end{pmatrix} \mid (\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2\right\}$; $G=\left\{\begin{pmatrix}0\\\delta\\0\\\gamma+\delta\end{pmatrix} \mid (\gamma,\delta)\in\mathbb{R}^2\right\}$

AD1) $F\cap G=\{0_{\mathbb{R}^4}\}$ #Double inclusion

$\boxed{\supset}$ Ok car $F\cap G$ sev $\in\mathbb{R}^4$

$\boxed{\subset}$ Soit $u\in F\cap G$.
$u=\begin{pmatrix}\alpha\\0\\\beta\\\alpha\end{pmatrix}$ car $u\in F$ et $u=\begin{pmatrix}0\\\delta\\0\\\gamma+\delta\end{pmatrix}$ car $u\in G$ $\forall(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\in\mathbb{R}^4$

donc $u=\begin{pmatrix}\alpha\\0\\\beta\\\alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\\delta\\0\\\gamma+\delta\end{pmatrix}$ $\begin{cases}\alpha=0\\\delta=0\\\beta=0\\\gamma=\alpha-\delta\end{cases}$ $\begin{cases}\alpha=0\\\beta=0\\\delta=0\\\gamma=0\end{cases}$ D'où $F\cap G=\{0_{\mathbb{R}^4}\}$
$\forall(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\in\mathbb{R}^4$

Soit $u \in F \cap G$

$u = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ \beta \\ \alpha \end{pmatrix}$ car $u \in F$ et $u = \begin{pmatrix} 0 \\ \delta \\ 0 \\ \gamma+\delta \end{pmatrix}$ car $u \in G$

$\Rightarrow u = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ \beta \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \delta \\ 0 \\ \gamma+\delta \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ 0 = \delta \\ \beta = 0 \\ \gamma = \alpha - \delta \end{cases} = \begin{cases} \alpha = 0 \\ \delta = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$ D'où $u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}^4}$ $\forall (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$

Donc $F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^4}\}$

ADC) $F + G = \mathbb{R}^4$

$\boxed{\supset}$ Ok par définition de $F+G$

$\boxed{\subset}$

Soit $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$

$u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \\ x \end{pmatrix}}_{\in F} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \\ t-x-y+y \end{pmatrix}}_{\in G}$ $(t-x-y) = \gamma$

$\Rightarrow u \in F+G$

Maths
19/02

Def : E, F $\mathbb{R}$ev.
Soit $f : E \to F$
On dit que f est linéaire si $\forall (u,v) \in E^2$ et $\forall \lambda \in \mathbb{R}$
$$f(\lambda u + v) = \lambda f(u) + f(v)$$

Notation : On note $\mathcal{L}(E,F)$, l'ensemble des applications linéaires de E vers F. Pour $E = F$, $\mathcal{L}(E,F)$ se note $\mathcal{L}(E)$
$f \in \mathcal{L}(E)$ s'appelle endomorphisme de E.

Rq : Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ alors $f(0_E) = 0_F$
si $f(0_E) \neq 0_F$, alors f n'est pas linéaire

Exercice n°12 : 3) $f \; \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ Mq $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x + y - 3z \\ x + z \end{pmatrix}$$

Soient $\left(u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \right) \in (\mathbb{R}^3)^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

MQ $f(\lambda u + v) = \lambda f(u) + f(v)$

$$f(\lambda u + v) = f\left(\begin{pmatrix} \lambda x + x' \\ \lambda y + y' \\ \lambda z + z' \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2(\lambda x + x') + (\lambda y + y') - 3(\lambda z + z') \\ (\lambda x + x') + (\lambda z + z') \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda(2x + y - 3z) + (2x' + y' - 3z') \\ \lambda(x + z) + (x' + z') \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2x + y - 3z \\ x + z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2x' + y' - 3z' \\ x' + z' \end{pmatrix}$$

$$= \lambda f(u) + f(v)$$

4)

1) Soient $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ $v = \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_p' \end{pmatrix} \in (\mathbb{R}^p)^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

ADJ $f(\lambda u + v) = \lambda f(u) + f(v)$

$$f(\lambda u+v) = f\left(\begin{pmatrix} \lambda x_1 + x_1' \\ \vdots \\ \lambda x_p + x_p' \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a_{11}(\lambda x_1 + x_1') + \dots + a_{1p}(\lambda x_p + x_p') \\ \vdots \\ a_{n1}(\lambda x_1 + x_1') + \dots + a_{np}(\lambda x_p + x_p') \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda(a_{11}x_1 + \dots + a_{1p}x_p) + (a_{11}x_1' + \dots + a_{1p}x_p') \\ \vdots \\ \lambda(a_{n1}x_1 + \dots + a_{np}x_p) + (a_{n1}x_1' + \dots + a_{np}x_p') \end{pmatrix}$$

$$= \lambda \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1p}x_p \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{np}x_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11}x_1' + \dots + a_{1p}x_p' \\ \vdots \\ a_{n1}x_1' + \dots + a_{np}x_p' \end{pmatrix} = \lambda f(u) + f(v)$$

2) $\Delta : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X]$

$P \longmapsto 2(X-1)P - (X^2 - 2X + 1)P'$

Soient $(P_1, P_2) \in \mathbb{R}[X]^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

ADJ $\Delta(\underbrace{\lambda P_1 + P_2}_{Q}) = \lambda \Delta(P_1) + \Delta(P_2)$

$\Delta(Q) = 2(X+1)Q - (X^2 - 2X + 1)Q'$

$\Delta(\lambda P_1 + P_2) = 2(X+1)(\lambda P_1 + P_2) - (X^2 - 2X + 1)(\lambda P_1 + P_2)'$

$= 2\lambda(X+1)P_1 + 2(X+1)P_2 - (X^2 - 2X + 1)(\lambda P_1') - (X^2 - 2X + 1)P_2'$

$= \lambda(2(X+1)P_1 - (X^2 - 2X + 1)P_1') + 2(X+1)P_2 - (X^2 - 2X + 1)P_2'$

$= \lambda \Delta(P_1) + \Delta(P_2)$.

3) $I : C^0(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$

$f \longmapsto \int_0^1 f(t)dt$

Soient $(f_1, f_2) \in (C^0(\mathbb{R}))^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

Maths
22/02

Exercice n°13 : (1) $f \in \mathcal{L}(E,F)$

1) Montrons que $\text{Ker}(f)$ est un sev de E.

* $\text{Ker}(f) \subset E$ par définition.
* Comme f est linéaire alors $f(0_E) = 0_F$ donc $\text{Ker}(f) \neq \emptyset$.
* Soient $(u,v) \in \text{Ker}f^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

ADJ $\lambda u + v \in \text{Ker}f$.

Soit $w = \lambda u + v$. et f une fonction de $\text{Ker}f$.

$f(w) = f(\lambda u + v) = \lambda f(u) + f(v)$ car f linéaire

$= \lambda 0_F + 0_F$

$= 0_F$

Donc $\text{Ker}f$ est un sev.

Montrons que $\text{Im}(f)$ est un sev de F

* $\text{Im}(f) \subset F$ par définition
* Comme f est linéaire $f(0_E) = 0_F$ avec $u = 0_E$.

* Soient $(u,v) \in \text{Im}(f)^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

ADJ $\lambda u + v \in \text{Im}(f)$.

$u = f(u')$ avec $u' \in E$ car $u \in \text{Im}(f)$ et $v = f(v')$ avec $v' \in E$ car $v \in \text{Im}(f)$

Soit $w = \lambda u + v$

$w = \lambda u + v = \lambda f(u') + f(v') = f(\lambda u' + v')$ et $\lambda u' + v' \in E$.
car f linéaire

D'où $\lambda u + v \in \text{Im}f$

Donc $\text{Im}f$ est sev de F. Ainsi $\text{Im}f$ est un $\mathbb{R}$-ev.

Rappel :

1) f injective si
$\forall (u,u') \in E^2, f(u) = f(u') \Longrightarrow u = u'$ } au + 1

2) f surjective si
$\forall v \in F \ \exists u \in E \ v = f(u)$. } au − 1.

2) ADJ f injective $\iff \ker f = \{0_E\}$.

$\boxed{\Rightarrow}$ (H) $\forall (u,u') \in E^2$, $f(u) = f(u')$

ADJ $\ker f = \{0_E\}$

$\boxed{\supset}$ Ok car $\ker f$ est un sev de E

$\boxed{\subset}$ Soit $u \in \ker f$

Ainsi $f(u) = 0_F$ or $0_F = f(0_E)$

D'où $f(u) = f(0_E)$.

$\Rightarrow u = 0_E$ par (H)

$\boxed{\Leftarrow}$: (H) $\ker f = \{0_E\}$.

ADJ $\forall (u,u') \in E^2$ $f(u) = f(u') \Rightarrow u = u'$

Soit $(u,u') \in E^2$ tq $f(u) = f(u')$

D'où $f(u) - f(u') = 0_F$

càd $f(u-u') = 0_F$ car f linéaire

Ainsi $u - u' \in \ker f$

D'où par (H) $u - u' = 0_E \iff u = u'$.

3) f surjective $\iff \forall v \in F$ $\exists u \in F$ $v = f(u)$

$\iff F \subset \mathrm{Im} f$

$\iff F = \mathrm{Im} f$ car on a déjà $\mathrm{Im} f \subset F$.

Exercice n°14

0) (H) $f \in \mathcal{L}(E,F)$ $g \in \mathcal{L}(F,G)$

ADJ $g \circ f \in \mathcal{L}(E,G)$

Soient $(u,v) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

ADJ $g\circ f(\lambda u + v) = \lambda g\circ f(u) + g \circ f(v)$

$g\circ f(\lambda u + v) = g(f(\lambda u + v))$

$= g(\lambda f(u) + f(v))$ car f linéaire

$= \lambda g(f(u)) + g(f(v))$ car g linéaire

$= \lambda g\circ f(u) + g \circ f(v)$

Mathis
22/02

1) (H) $f \in \mathcal{L}(E)$ $f^2 = f \circ f \in \mathcal{L}(E)$
AD) $\ker f \subset \ker(f^2)$

Soit $u \in \ker f$
Ainsi $f(u) = 0_E$
D'où $f(f(u)) = f(0_E)$.
$f(0_E) = 0_E$ car f linéaire.
$\Rightarrow f^2(u) = 0_E$
$\Rightarrow u \in \ker f^2$

2) AD) $\operatorname{Im} f^2 \subset \operatorname{Im} f$

Soit $v \in \operatorname{Im} f^2$.
$\exists u \in E$ $v = f^2(u)$
Ainsi $v = f(\underbrace{f(u)}_{\in E})$
D'où $v \in \operatorname{Im} f$.

3) AD) $\operatorname{Im} f \cap \ker f = \{0_E\} \Leftrightarrow \ker f = \ker f^2$

$\boxed{\Rightarrow}$ (H) $\operatorname{Im} f \cap \ker f = \{0_E\}$.
AD) $\ker f = \ker f^2$
$\boxed{\subset}$ Question 1
$\boxed{\supset}$ Soit $v \in \ker f^2$
Ainsi $f^2(v) = 0_E$
D'où $f(f(v)) = 0_E$
càd $f(v) \in \ker f$
or $f(v) \in \operatorname{Im} f$
Ainsi $f(v) \in \operatorname{Im} f \cap \ker f$
D'où par (H) $f(v) = 0_E$
càd $v \in \ker f$

$\Updownarrow$ $\boxed{\Leftarrow}$ (H) $\ker f = \ker f^2$

AD) $\mathrm{Im} f \cap \ker f = \{0_E\}$.

$\boxed{\supset}$ Ok, car $\mathrm{Im} f \cap \ker f$ sev de E.

$\boxed{\subset}$ Soit $v \in \mathrm{Im} f \cap \ker f$

$v \in \mathrm{Im} f$ et $v \in \ker f$

càd $\exists v' \in E$, $v = f(v')$ et $f(v) = 0_E$

or $f(f(v)) = f^2(v')$ d'où $f(v') = 0_E$ càd $v' \in \ker f^2$

Ainsi par (H) $v' \in \ker f$

D'où $f(v') = 0_E \Rightarrow v = 0_E$.

Exercice n°16 :

$f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$(x,y) \mapsto (2x+y, x-y)$

- Noyau $\ker(f_1)$

$(x,y) \in \ker(f_1) \Leftrightarrow f_1(x,y) = (0,0)$

$\Leftrightarrow (2x+y, x-y) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=0 \\ x-y=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow 2x + x + y - y = 0$

$\Leftrightarrow 3x = 0$

d'où $x = 0$ et $y = 0$

Donc $\ker(f_1) = \{(0,0)\}$

$\hookrightarrow f_1$ injective.

$f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$(x,y,z) \mapsto (2x+y+z, y-z, x+y)$

$\ker(f_2) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid f_2((x,y,z)) = 0_{\mathbb{R}^3}\}$

$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x+y+z=0, y=z, x=-y\}$

$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z=y, x=-y$.

$= \{(-y,y,y) ; y \in \mathbb{R}\}$

$= \{y(-1,1,1) ; y \in \mathbb{R}\}$.

$= \mathrm{Vect}(\{(-1,1,1)\})$.

Maths

5/4

Ainsi $\{e_1, e_2\}$ est une famille de 2 vecteurs de $\operatorname{Im} f$. or $\dim(\operatorname{Im} f) = 2$
Donc c'est une base de $\operatorname{Im} f$.

si $\operatorname{Ker} f = \{0_{\mathbb{R}^3}\} \Rightarrow \dim(\operatorname{Ker} f) = 0$.

Exercice n°28: 1) $\operatorname{Ker} f = \{$

$$\begin{cases} 6x - 4y - 4z = 0 \\ 5x - 3y - 4z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x - 4x - 4z = 0 \\ 5x - 3x - 4z = 0 \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cancel{2x - 4z = 0} \\ 2x - 4z = 0 \\ x = y \end{cases}$$

$$\text{①+②} \begin{cases} 2x - 4z = 0 \\ z = \frac{x}{2} \\ x = y \end{cases}$$

$2x = 4z$

$\operatorname{Ker} f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tq } x - y = 0 \text{ et } x = 2z\}$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \\ \frac{x}{2} \end{pmatrix}; x \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}; x \in \mathbb{R} \right\}.$$

$\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}\left(\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}\right)$ est generatrice et or $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ alors libre.
Alors $\dim(\operatorname{Ker} f) = 1$.
D'après le thm du Rang
$\dim \mathbb{R}^3 = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f$
$\Rightarrow \dim \operatorname{Im} f = \dim \mathbb{R} - \dim \operatorname{Ker} f = 3 - 1 = 2$.
Base canonique : $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

2) $u = e_1 + e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow f(u) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2u$.
$v = e_2 - e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow f(v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = V$

3°) ADJ (u, v) base de $\operatorname{Im} f$.

3°) ADJ (u,v) base de $\mathrm{Im} f$

* $u = \frac{1}{2} f(u) = f(\frac{u}{2})$ d'où $u \in \mathrm{Im} f$.
* $v = f(v) \Rightarrow v \in \mathrm{Im} f$.
* Montrons que (u,v) est libre.

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tq $\alpha u + \beta v = 0_{\mathbb{R}^3}$

Ainsi $\begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \\ -\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = 0.$

$\Rightarrow$ CCL : famille libre dans espace vectoriel dim = 2 et Im f à découvert

$\Rightarrow$ Il s'agit d'une base.

Exercice n°29 : (H) $\dim E = n$

AD) $f^2 = 0$ et $\dim(\mathrm{Im} f) = \frac{n}{2} \Leftrightarrow \mathrm{Im} f = \mathrm{Ker} f$

$\boxed{\Rightarrow}$ (H) $f^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $\dim(\mathrm{Im} f) = \frac{n}{2}$

AD) $\mathrm{Im} f = \mathrm{Ker} f$.

Double inclusion :

Code de la route.

$\boxed{\subset}$ Soit $x \in \mathrm{Im} f$

$\exists y \in E, x = f(y)$.

$\Rightarrow f(x) = f(f(y)) = f^2(y)$

$f(x) = 0_E \Rightarrow x \in \mathrm{Ker} f$

Ainsi $\mathrm{Im} f \subset \mathrm{Ker} f$

$\boxed{\supset}$ Or par thm du rang

$\dim E = \dim \mathrm{Ker} f + \dim \mathrm{Im} f$

$\dim \mathrm{Ker} f = \dim E - \dim \mathrm{Im} f = n - \frac{n}{2} = \frac{n}{2}$

Ainsi $\dim(\mathrm{Ker} f) = \dim(\mathrm{Im} f)$.

D'où $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Im} f$

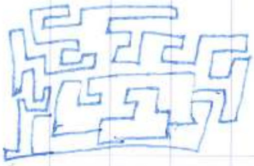
$\boxed{\Leftarrow}$ (H) $\mathrm{Im} f = \mathrm{Ker} f$

AD) $f^2 = 0$ et $\dim(\mathrm{Im} f) = \frac{n}{2}$.

D'après le thm du rang

Si $\dim \mathrm{Ker} f = \dim \mathrm{Im} f$, alors $\dim E = 2 \times \dim \mathrm{Ker} f$

$\Rightarrow \frac{n}{2}$.



AD) $f^2=0$ Soit $x\in E$.

On a $f(x)\in \mathrm{Im} f$. D'où $f(x)\in \ker f$ par (H)

Ainsi $f(f(x))=0_E$ càd $f^2(x)=0_E$.

CCL : $\forall x\in E$ $f^2(x)=0_E$. Donc $f^2=0_{\mathcal{L}(E)}$.

Exercice n°30 : AD) $\mathrm{Im} f=\mathrm{Im} f^2 \iff E=\ker f\oplus \mathrm{Im} f$

$\boxed{\Leftarrow}$ (H) $\forall x\in E\ \exists!\,(x_1,x_2)\in\ker f\times \mathrm{Im} f\ \ x=x_1+x_2$.

AD) $\mathrm{Im} f=\mathrm{Im} f^2$.

$\boxed{\supset}$ Soit $y\in \mathrm{Im} f^2$

Alors $\exists x\in E$ tq $y=f^2(x)=f(f(x))$

$\Rightarrow y\in \mathrm{Im} f$.

$\boxed{\subset}$ Soit $y\in\mathrm{Im} f$.

$\exists x\in E,\ y=f(x)$

Or $x\in E$ d'où par (H) $\exists(x_1,x_2)\in\ker f\times\mathrm{Im} f$ tq $x=x_1+x_2$

Ainsi $f(x)=f(x_1)+f(x_2)=f(x_2)$

or $x_2\in \mathrm{Im} f$ d'où $\exists x_3\in E$ $x_2=f(x_3)$.

$\Rightarrow y=f(f(x_3))=f^2(x_3)$

$\Rightarrow y\in\mathrm{Im} f^2$.

$\boxed{\Rightarrow}$ (H) $\mathrm{Im} f=\mathrm{Im} f^2$

AD) 2) $\ker f\cap \mathrm{Im} f=\{0_E\}$ (2) et $E=\ker f+\mathrm{Im} f$ (1)

(1) $\boxed{\supset}$ Ok par def.

$\boxed{\subset}$ Soit $x\in E$., $f(x)\in\mathrm{Im} f$

D'où par (H) $f(x)\in \mathrm{Im} f^2$

càd $\exists y\in E$ tq $f(x)=f^2(y)\Rightarrow f(x)-f^2(y)=0_E$

Ainsi $x-f(y)\in\ker f$. $\Rightarrow f(x-f(y))=0_E$

D'où on peut écrire

$x=\underbrace{x-f(y)}_{=x_1\in\ker f}+\underbrace{f(y)}_{=x_2\in \mathrm{Im} f}$

Donc $x\in\ker f+\mathrm{Im} f$

Savoir démontrer si c'est une espace vect. ou non.

Espaces vectoriels supplémentaires.

Formule:

$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$.

2) On sait que :

$$\dim(\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f) = \underbrace{\dim(\operatorname{Ker} f) + \dim(\operatorname{Im} f)}_{\substack{\dim(E) \\ \text{Thm du Rang}}} - \dim(\operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f)$$

$$= \dim(E) - \dim(E).$$

$$= 0.$$

$\Rightarrow \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0_E\}$.