Corrections manquantes : Algèbre linéaire 1

Exercice n°5 $Vect(A) + Vect(B)$ un sev (propriété des sev).

$Vect(A \cup B) = Vect(A) + Vect(B)$

$Vect(A) \subset (Vect(A) + Vect(B))$ et $Vect(B) \subset (Vect(A) + Vect(B))$

$\boxed{\supset}$

D'où $A \subset (Vect(A) + Vect(B))$ et $B \subset (Vect(A) + Vect(B))$

$\Rightarrow A \cup B \subset (Vect(A) + Vect(B))$

Donc $Vect(A \cup B) \subset (Vect(A) + Vect(B))$

$\boxed{\subset}$ $A \subset A \cup B \Rightarrow Vect(A) \subset Vect(A \cup B)$

De même $Vect(B) \subset Vect(A \cup B)$

Par suite $Vect(A) + Vect(B) \subset Vect(A \cup B)$

ccl : $Vect(A) + Vect(B) = Vect(A \cup B)$.

Exo n°15 : 1) (H) $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $g \in \mathcal{L}(F, G)$.

Bq : $g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$

1) AD] $Ker(g \circ f) = f^{-1}(Ker g)$

$\boxed{\subset}$

Soit $x \in Ker(g \circ f)$

Ainsi $g \circ f(x) = 0_G$

D'où $g(f(x)) = 0_G$

$\Rightarrow f(x) \in Ker g$

$\Rightarrow x \in f^{-1}(Ker g)$

$\boxed{\supset}$

Soit $x \in f^{-1}(Ker g)$

d'où $f(x) \in Ker g$

Ainsi $g(f(x)) = 0_G$

cad $g \circ f(x) = 0_G$

Donc $x \in Ker(g \circ f)$.

2) $g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$

AD] $Im(g \circ f) = g(Im(f))$

$\boxed{\subset}$

Soit $x \in Im(g \circ f)$

$\exists y \in E, x = g \circ f(y)$

D'où $x = g(f(y))$.

or $f(y) \in Im f$

D'où $Im(g \circ f) = g(Im f)$

$\boxed{\supset}$

Soit $x \in g(Im f)$

$\exists y \in Im(f)$ tq $x = g(y)$

or $y \in Im f$ d'où $\exists z \in E$ $y = f(z)$

Ainsi $x = g(f(z)) = g \circ f(z)$

$\Rightarrow x \in Im(g \circ f)$

Maths
12/02

Exercice n°17 : (H) $(u,v) \in (\mathcal{L}(E))^2$ $u \circ v = v \circ u$

AD) $E = \ker(u) \oplus \ker(v) \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{Im}(u) \subset \ker(v) \\ \mathrm{Im}(v) \subset \ker(u). \end{cases}$

Soit $x \in \mathrm{Im}(f)$

$\exists y \in E \quad x = u(y) \Rightarrow v(x) = v \circ u(y).$

or $y \in E$ d'où par (H), $\exists (y_1, y_2) \in \ker(u) \times \ker(v)$

tq $y = y_1 + y_2$

Ainsi $v(x) = v \circ u(y) = v \circ u(y_1 + y_2) = v \circ u(y_1) + v \circ u(y_2)$
car lin.

$= v(u(y_1)) + v(u(y_2)) =$

$= v(0_E) + v(0_E) = 0_E + 0_E = 0_E$.

$\Rightarrow v(x) = 0_E$

$\Rightarrow x \in \ker(v)$.

Exercice n°18 :

(H) $\begin{cases} f, p \in \mathcal{L}(E) \\ p \circ f = f \circ p \end{cases}$

AD 1) $f(\ker p) \subset \ker p$

Soit $x \in f(\ker p)$

$\exists y \in \ker p$ tq $x = f(y)$

Ainsi $p(x) = p(f(y)) = p \circ f(y) = f \circ p(y) = f(p(y))$

or $y \in \ker p$ d'où $p(y) = 0_E$. Ainsi $p(x) = f(0_E)$

$\Rightarrow p(x) = 0_E$ car f linéaire

$\Rightarrow x \in \ker p$

AD 2) $f(\mathrm{Im}(p)) \subset \mathrm{Im}(p)$

Soit $x \in f(\mathrm{Im}(p))$

$\exists y \in \mathrm{Im}(p)$ tq $x = f(y)$.

or $y \in \mathrm{Im}\,p$ d'où $\exists z \in E$, $y = p(z)$.

Ainsi $x = f(p(z)) = f \circ p(z) = p \circ f(z) = p(f(z))$

$\Rightarrow x \in \mathrm{Im}(p)$

Exercice n°19 :

(H) $\begin{cases} p \in \mathcal{L}(E),\ p \circ p = p \\ s = 2p - id \\ id : E \to E \quad id \in \mathcal{L}(E) \\ \quad x \mapsto x \quad id(x) = x \end{cases}$

1) AD) $id - p \in \mathcal{L}(E)$ et $(id - p) \circ (id - p) = id - p$

* $id \in \mathcal{L}(E)$ et $p \in \mathcal{L}(E)$ d'où $id - p \in \mathcal{L}(E)$
* $(id - p) \circ (id - p) = id \circ id - id \circ p - p \circ id + p \circ p$

$= id - p - p + p = id - p$.

Exercice n°20 : $\Delta = 1$ $(X-2)(X-3)$

$x_1 = \frac{5+1}{2} = 3$ $x_2 = \frac{5-1}{2} = 2$.

2) (H) $f \in \mathcal{L}(E)$. $f^2 - 5f + 6id = 0_{\mathcal{L}(E)}$ polynome d'endomorphisme.

Mq * $(f-2id)\circ(f-3id)$

$= f^2 - 3f\circ id - 2id\circ f + 6id\circ id$

$= f^2 - 3f - 2f + 6id$

$= f^2 - 5f + 6id = 0$

* $(f-3id)\circ(f-2id) = f^2 - 5f + 6id = 0$.

a) $(f-2id) - (f-3id) = f - 2id - f + 3id = id$

b) AD) $\ker(f-2id) \oplus \ker(f-3id) = E$

AD1) $\ker(f-2id) \cap \ker(f-3id) = \{0_E\}$

$\boxed{\supset}$ Ok car $\ker(f-2id) \cap \ker(f-3id)$ SEV de E.

$\boxed{\subset}$ Soit $x \in \ker(f-2id) \cap \ker(f-3id)$

$x \in \ker(f-2id)$ et $x \in \ker(f-3id)$.

D'où $(f-2id)(x) = 0_E$ et $(f-3id)(x) = 0$

$\Rightarrow f(x) - 2x = 0$ et $f(x) - 3x = 0$

$\Rightarrow f(x) = 2x$ et $f(x) = 3x$

$\Rightarrow 2x = 3x$ d'où $x = 0_E$.

AD2) $\ker(f-2id) + \ker(f-3id) = E$

$\boxed{\subset}$ Ok par def

$\boxed{\supset}$ Soit $x \in E$

Par a) $x = \underbrace{(f-2id)(x)}_{=x_2} - \underbrace{(f-3id)(x)}_{=x_1}$

or $(f-2id)(x_1) = (f-2id)\circ(f-3id)(x) = (f^2-5f+6id)(x) = 0_E$

$\Rightarrow x_1 \in \ker(f-2id) \Rightarrow -x_1 \in \ker(f-2id)$ car SEV.

et $(f-3id)(x_2) = (f-3id)\circ(f-2id)(x) = (f^2-5f+6id)(x) = 0_E$

$\Rightarrow x_2 \in \ker(f-3id)$

Ainsi $x = x_2 - x_1 = (-x_1) + x_2$.

$\Rightarrow x \in \ker(f-2id) + \ker(f-3id)$.

Exercice n°1

1) Soit $(a,b) \in (\mathbb{R}^2)^2$ et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

tq $\lambda_1 a + \lambda_2 b = 0_{\mathbb{R}^2}$

$\Rightarrow \lambda_1 (1, 2) + \lambda_2 (3,5) = (0,0) \Leftrightarrow (\lambda_1 + 3\lambda_2, 2\lambda_1 + 5\lambda_2) = (0,0)$

$\begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_1 + 5\lambda_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -3\lambda_2 \\ -6\lambda_2 + 5\lambda_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ -\lambda_2 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ Donc $((1,2),(3,5))$ est libre

Exercice n°21 :

2) Soit $(a,b,c) \in (\mathbb{R}^3)^3$ et $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$

avec $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$; $b = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$; $c = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$

où $\lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c = 0_{\mathbb{R}^3}$

$$\begin{matrix} ① \\ ② \\ ③ \end{matrix}\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 - 2\lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_1 - 3\lambda_2 - 3\lambda_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{matrix} ① \\ ② \\ ①+③ \end{matrix}\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 - 2\lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 = \lambda_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_3 = \frac{3\lambda_1}{3} = \lambda_1 \\ 2\lambda_1 - 2\lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 = \lambda_2 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_3 = \lambda_1 \\ \lambda_2 = 2\lambda_1 \\ 2\lambda_1 - 2\lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 - 2\lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_1 - 3\lambda_2 - 3\lambda_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_1 + 3\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \cancel{\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 = 0} \end{cases}$$

$$\iff \underset{\downarrow}{1+2} \begin{cases} \alpha + \beta + 3\gamma = 0 \\ 2\alpha + 2\gamma = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \beta = -2\gamma \\ \alpha = -\gamma \end{cases}$$

Ainsi pour $\gamma = 1$, $\alpha = -1$, $\beta = -2$

D'où $-v_1 - 2v_2 + v_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$

3) $E = \mathbb{R}^2[X] = \{P \in \mathbb{R}[X] \ d°(P) \leq 2\}$

$P_1 = 1 \quad P_2 = X + 1 \quad P_3 = (X-1)^2$

Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 \quad \alpha P_1 + \beta P_2 + \gamma P_3 = 0_{\mathbb{R}_2[X]}$

$\Rightarrow \alpha + \beta(X+1) + \gamma(X-1)^2 = 0_{\mathbb{R}^2[X]}$

$\Rightarrow \alpha + \beta X + \beta + \gamma X^2 - 2\gamma X + \gamma = 0_{\mathbb{R}_2[X]}$

$\Rightarrow \gamma X^2 + (\beta - 2\gamma)X + \alpha + \beta + \gamma = 0X^2 + 0X + 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \gamma = 0 \\ \beta - 2\gamma = 0 \\ \alpha + \beta + \gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \gamma = \beta = \alpha = 0$$

CCL : (P_1, P_2, P_3) libre

4) $E = \mathbb{R}^{]-1;1[} = \{f\,]-1;1[\to \mathbb{R}\}$

$f \cdot x \to \frac{1}{x-1}$; $g \cdot x \to \frac{1}{x+1}$

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tq $\alpha f + \beta g = 0_{\mathbb{R}^{]-1;1[}}$

$\Rightarrow \forall x \in]-1;1[\ \alpha f(x) + \beta g(x) = 0$

$\Rightarrow \forall x \in]-1;1[\ \frac{\alpha}{x-1} + \frac{\beta}{x+1} = 0$

En particulier

pour $x = 0$ $\quad -\alpha + \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta$

pour $x = \frac{1}{2}$: $\frac{\alpha}{-\frac{1}{2}} + \frac{\beta}{\frac{3}{2}} = 0 \Leftrightarrow -2\alpha + \frac{2}{3}\beta = 0$

Or $\alpha = \beta$ d'où $\frac{-4}{3}\alpha = 0$ ainsi $\alpha = 0$. Donc $\alpha = \beta = 0$

CCL : (f, g) libre.

5) $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \{f \cdot \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$; $f \cdot x \mapsto x$; $g\ x \mapsto |x|$; $h \cdot x \mapsto 1 - x$

Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tq $\alpha f + \beta g + \gamma h = 0_E$

D'où $\forall x \in \mathbb{R}\ \alpha f(x) + \beta g(x) + \gamma h(x) = 0$

càd $\forall x \in \mathbb{R}\ \alpha x + \beta |x| + \gamma (1 - x) = 0$

Ainsi pour $x = 0 \quad \gamma = 0$

$x = 1 \quad \alpha + \beta = 0 \quad \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$

$x = -1 \quad -\alpha + \beta = 0 \quad$ Donc (f, g, h) libre.

6) $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \{f \cdot \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$; $f \cdot x \to 1$; $g \cdot x \mapsto \cos^2(x)$; $h\ f \cdot x \mapsto \cos(2x)$

Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tq $\alpha f + \beta g + h\gamma = 0_E$

D'où $\forall x \in \mathbb{R}\ \alpha f(x) + \beta g(x) + \gamma h(x) = 0$

càd $\forall x \in \mathbb{R}\ \alpha + \beta \cos^2(x) + \gamma \cos(2x) = 0$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$a = b \Rightarrow \cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(b) = \cos^2(a) - (1 - \cos^2(a)) = 2\cos^2(a) - 1$

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = 2g(x) - f(x)$

$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}\ 2g(x) - f(x) - h(x) = 0$.

Donc $2g - f - h = 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}$. CCL : (f, g, h) liée.

7) est introuvable

Exercice n°22 :

Rappels : (H) $\dim E = n$

Toutes familles génératrices de E à au moins n vecteurs

Toute famille libre de E a au plus n vecteurs

Tout famille d'au moins n+1 vecteurs est liée

Base

$E = \mathbb{R}_2[X]$.

1) $\mathcal{B}_1 = \{X^2 + X ; X + 3\}$ $\dim \mathbb{R}_2[X] = 3 > \text{Card}\, \mathcal{B}_1 = 2$.

$\Rightarrow \mathcal{B}_1$ n'engendre pas E.

2) $\mathcal{B}_2 = \{2 ; X+1 ; 2X^2 ; X^2+3\}$ $\dim \mathbb{R}_2[X] = 3 < \text{Card}\, \mathcal{B}_2 = 4$

$\Rightarrow \mathcal{B}_2$ est liée $\Rightarrow \mathcal{B}_2$ n'est pas une famille libre

3) $\mathcal{B}_3 = \{1 ; X+1 ; X^2+2X\}$.

- $\text{Card}\, \mathcal{B}_3 = 3 = \dim \mathbb{R}_2[X]$.
- Montrons que $\mathcal{B}_3$ libre.

Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tq $\alpha \cdot 1 + \beta(X+1) + \gamma(X^2+2X) = 0$

$X^2\gamma + X(\beta + 2\gamma) + \alpha + \beta = 0$.

Un polynome est nul ssi ses coef = 0.

$$\begin{cases} \gamma = 0 \\ \beta + 2\gamma = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \end{cases} \qquad \gamma = \beta = \alpha = 0$$

$\Rightarrow \mathcal{B}_3$ libre $\Rightarrow$ CCL : $\mathcal{B}_3$ base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Def : On dit que $(u_1,\dots,u_n)$ est génératrice de E si $E = \text{Vect}(\{u_1,\dots,u_n\})$
càd $\forall u \in E \ \exists (\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tq

$$u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n$$

Ex 1) $\forall u = (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad u = x\underbrace{(1,0)}_{\vec{i}} + y\underbrace{(0,1)}_{\vec{j}}$

Donc $(\vec{i},\vec{j})$ génératrice de $\mathbb{R}^2$
Base canonique
2) $\forall P \in \mathbb{R}_2[X]$.
$\exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, $P = aX^2 + bX + c$
$\Rightarrow (1, X, X^2)$ engendre $\mathbb{R}_2[X]$.
Def : $(u_1,\dots,u_n)$ base de E si
$(u_1,\dots,u_n)$ libre et génératrice de E.

Famille Base $\Rightarrow$ libre ou generatrice.

Exercice n°23 $E = \mathbb{R}^3$, $\dim \mathbb{R}^3 = 3$
$u = (1,1,-1)$; $v = (-1,1,1)$; $w = (1,-1,1)$.
ADJ (u,v,w) base de $\mathbb{R}^3$ Nombre d'élément.
1ère méthode : $\dim \mathbb{R}^3 = 3 = \text{Card}(u,v,w)$ donc pour Mq (u,v,w) est une base
il suffit de montrer que (u,v,w) est libre.
Soit $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \in \mathbb{R}^3$.
Posons

$$\lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w = 0$$

$$\lambda_1 \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 = 0 \\ 2\lambda_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} 1+3 \\ 1+2 \\ 2+3 \end{matrix} \quad \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

Donc (u,v,w) libre. Ainsi (u,v,w) base de $\mathbb{R}^3$
càd $\forall X = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ \exists! (\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3 \ X = \alpha u + \beta v + \gamma w$

2e Méthode " " Mq (u,v,w) est génératrice.

Soit $X=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$
On cherche $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3$ tq $\alpha u+\beta v+\gamma w=X$

$$\begin{cases}\alpha-\beta+\gamma=x\\ \alpha+\beta-\gamma=y\\ -\alpha+\beta+\gamma=z\end{cases} \iff \begin{cases}2\alpha=x+y\\ 2\beta=y+z\\ 2\gamma=x+z\end{cases} \iff \begin{cases}\alpha=\frac{x+y}{2}\\ \beta=\frac{y+z}{2}\\ \gamma=\frac{x+z}{2}\end{cases}$$

càd $\forall X=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, $X=\frac{x+y}{2}u+\frac{y+z}{2}v+\frac{x+z}{2}w$
D'où $\mathbb{R}^3=\mathrm{Vect}(\{u,v,w\})$
Ainsi (u,v,w) engendre $\mathbb{R}^3$. CCL : (u,v,w) base de $\mathbb{R}^3$
Pour $X=(2,1,3)$ on a
$X=\frac{3}{2}u+2v+\frac{5}{2}w$
$\Rightarrow \mathrm{Coord}_{(u,v,w)}(X)=\left(\frac{3}{2},2,\frac{5}{2}\right)$

Exercice n°24. $E=\mathbb{R}_3[X]$.
$P_0=1$
$P_1=1+X$
$P_2=(1+X)^2$
$P_3=(1+X)^3$

1e méthode : $\dim\mathbb{R}_3[X]$
Pour mq B est
suffit de mq B

Soit $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\in\mathbb{R}^4$ tq $\alpha(P_0)+\beta P_1+\gamma P_2+\delta P_3=0_{\mathbb{R}_3[X]}$

$\alpha+\beta(1+X)+\gamma((1+X)^2)+\delta((1+X)^3)=0_{\mathbb{R}_3[X]}$.
$\alpha+\beta+\beta X+\gamma+2\gamma X+\gamma X^2+\delta+3\delta X+3\delta X^2+\delta X^3=0_{\mathbb{R}_3[X]}$.

1 1
1 2 1
1 3 3 1

10 2

$X^3(\delta)+X^2(\gamma+3\delta)+X(\beta+2\gamma+3\delta)+\alpha+\beta+\gamma+\delta=0_{\mathbb{R}_3[X]}$.

$$\begin{cases}\delta=0\\ \gamma+3\delta=0\\ \beta+2\gamma+3\delta=0\\ \alpha+\beta+\gamma+\delta=0\end{cases} \iff \delta=\gamma=\beta=\alpha=0$$

D'où B est libre
C'est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

Soit $Q = aX^3 + bX^2 + cX + d \in \mathbb{R}_3[X]$.

$aX^3 + bX^2 + cX + d = \delta(X^3) + (\gamma + 3\delta)X^2 + (\beta + 2\gamma + 3\delta)X + \alpha + \beta + \gamma + \delta$

$$\begin{cases} \delta = a \\ \gamma + 3\delta = b \\ \beta + 2\gamma + 3\delta = c \\ \alpha + \beta + \gamma + \delta = d \end{cases} \iff \begin{cases} \delta a \\ \gamma = b - 3a \\ \beta = c - 2b + 3a \\ \alpha = b + a + d - c \end{cases}$$

càd $\mathbb{R}_3[X] = \mathrm{Vect}(P_1, P_2, P_3, P_0)$

Ainsi $\mathcal{B}$ engendre $\mathbb{R}_3[X]$.

ccl : $\mathcal{B}$ base de $\mathbb{R}_3[X]$.

2) $Q = X^3 + 2X^2 \implies a = 1 ; b = 2 ; c = d = 0$.

$Q = 1P_0 + 1P_1 - 1P_2 + P_3 -$

$\mathrm{Coord}_{\mathcal{B}}(Q) = (1, -2, -2, 1)$.

3) $f(x) = (x^3 + 2x^2)(1+x)^{\frac{3}{2}}$

$= (1 - (1+x) - (1+x)^2 + (1+x)^3)(1+x)^{\frac{3}{2}}$

$= (1+x)^{\frac{3}{2}} - (1+x)^{\frac{5}{2}} - (1+x)^{\frac{7}{2}} + (1+x)^{\frac{9}{2}}$

Une primitive de f est

$$F(x) = \frac{(1+x)^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} - \frac{(1+x)^{\frac{5}{2}+1}}{\frac{5}{2}+1} - \frac{(1+x)^{\frac{7}{2}+1}}{\frac{7}{2}+1} + \frac{(1+x)^{\frac{9}{2}+1}}{\frac{9}{2}+1}$$

$$= \frac{2}{5}(1+x)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{7}(1+x)^{\frac{7}{2}} - \frac{2}{9}(1+x)^{\frac{9}{2}} + \frac{2}{11}(1+x)^{\frac{11}{2}}$$

Exercice n°24,5 : 1) $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x = y\}$
Mq $v\{(1,1)\}$ base de F
2) $G = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ 2x + y - t = 0\}$
Trouver dim G.
↳ Nombre d'element d'une base.

1) Ecrire F sous forme de Vect
$F = \{(x,x) ; x \in \mathbb{R}\}$
$= \{x(1,1) ; x \in \mathbb{R}\}$
$= Vect(\{1,1\})$
$\Rightarrow \{(1,1)\}$ est generatrice de F.
or $(1,1) \neq 0_{\mathbb{R}^2}$ donc $(\{(1,1)\})$ est une famille libre.
CCL : $\{(1,1)\}$ base de F (dim F = 1).

Programme TD, SEV → Vect.
Une famille d'un seul vecteur est libre ssi ce vecteur $\neq \vec{0}$ (une famille)

#on fixe les variables
2) $G = \{(x,y,z,2x+y), (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\}$.
$= \{x\underbrace{(1,0,0,2)}_{e_1} + y\underbrace{(0,1,0,1)}_{e_2} + z\underbrace{(0,0,1,0)}_{e_3}, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\}$
$\Rightarrow G = Vect(\{e_1, e_2, e_3\})$
Ainsi (e_1, e_2, e_3) est une famille génératrice de G
Mq que c'est une famille libre.
Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tq $\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 = 0_{\mathbb{R}^4}$
Ainsi $\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \\ 2\alpha + \beta = 0 \end{cases}$ → libre
CCL : (e_1, e_2, e_3) base de G
Ainsi dim G = 3.

Exercice n°25 : (H) $\begin{cases} n\in\mathbb{N}^* \ a_1,\dots,a_n \text{ distincts.} \\ \forall i \in [\![1,n]\!] \ L_i(x) = \prod\limits_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} \dfrac{X-a_k}{a_i-a_k} \end{cases}$

$$\text{Ex : } L_1(X) = \frac{X-a_2}{a_1-a_2} \times \frac{X-a_3}{a_1-a_3} \times \dots \times \frac{X-a_n}{a_1-a_n} \in \mathbb{R}_{n-1}[X].$$

$$L_2(X) = \frac{X-a_1}{a_2-a_1} \times \frac{X-a_3}{a_2-a_3} \times \dots \times \frac{X-a_n}{a_2-a_n}$$

AD] $(L_1,\dots L_n)$ base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

$\mathrm{Card}(L_1,\dots,L_n) = n = \dim \mathbb{R}_{n-1}[X]$, il suffit donc de montrer que $(L_1,\dots L_n)$ est libre. Soit $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{R}^n$ tq $\lambda_1 L_1(X)+\lambda_2 L_2(X)+\dots+\lambda_n L_n(X) = 0_{\mathbb{R}_{n-1}[X]}$.

Ainsi pour $X = a$

$\lambda_1 L_1(a_1) + \lambda_2 L_2(a_1) + \dots + \lambda_n L_n(a_1) = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 \times 1 + \lambda_2 \times 0 + \dots + \lambda_n \times 0 = 0.$

$\Rightarrow \lambda_1 = 0.$

Pour $X = a_2$ on a λ_2 etc. pour $X = a_n$, $\lambda_n = 0$.

Ainsi $(L_1,\dots,L_n)$ libre, CCL : $(L_1,\dots L_n)$ base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

[⊃] Ok car $\ker(f-2id) \cap \ker(f-3id)$ SEV de E.
[⊂] Soit $x \in \ker(f-2id) \cap \ker(f-3id)$
$x \in \ker(f-2id)$ et $x \in \ker(f-3id)$.
D'où $(f-2id)(x) = 0_E$ et $(f-3id)(x) = 0$
$\Rightarrow f(x) - 2x = 0$ et $f(x) - 3x = 0$
$\Rightarrow f(x) = 2x$ et $f(x) = 3x$
$\Rightarrow 2x = 3x$ d'où $x = 0_E$.

AD2] $\ker(f-2id) + \ker(f-3id) = E$
[⊂] Ok par def
[⊃] Soit $x \in E$
Par a) $x = \underbrace{(f-2id)(x)}_{=x_1} - \underbrace{(f-3id)(x)}_{=x_2}$
or $(f-2id)(x_1) = (f-2id)\circ(f-3id)(x) = (f^2-5f+6id)(x) = 0_E$
$\Rightarrow x_1 \in \ker(f-2id) \Rightarrow -x_1 \in \ker(f-2id)$ car SEV.
et $(f-3id)(x_2) = (f-3id)\circ(f-2id)(x) = (f^2-5f+6id)(x) = 0_E$
$\Rightarrow x_2 \in \ker(f-3id)$
Ainsi $x = x_2 - x_1 = (-x_1) + x_2$.
$\Rightarrow x \in \ker(f-2id) + \ker(f-3id)$.

Exercice n°26:

1) Soient $u = (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $v = (x',y') \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
$f(\lambda u + v) = f((\lambda x + x', \lambda y + y'))$
$= (\lambda x + x') + (\lambda y + y')$
$= \lambda(x+y) + (x'+y')$
$= \lambda f(u) + f(v) \Rightarrow f \in \mathcal{L}(E)$.

2) $\ker f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, f((x,y)) = 0\}$.
$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; x+y=0\} = \{(x,-x) ; x \in \mathbb{R}\} = \{x(1,-1) ; x \in \mathbb{R}\}$
$= \mathrm{Vect}(\{(1,-1)\})$

Ainsi $((1,-1))$ est génératrice de $\ker f$. Or $(1,-1) \neq 0_{\mathbb{R}^2}$ d'où c'est une famille libre

CCL : $((1,-1))$ base de $\ker f$ ($\dim \ker f = 1$).

3) $\forall z \in \mathbb{R} \; \exists (0,z) \in \mathbb{R}^2, z = f((0,z))$.

Ainsi $\forall z \in \mathbb{R}, z \in \mathrm{Im} f \Rightarrow \mathbb{R} \subset \mathrm{Im} f$ or $\mathrm{Im} f \subset \mathbb{R}$.

Autre méthode pour 3.

1) Théorème du rang : Soient E, F $\mathbb{R}$-ev dim finie et $f \in \mathcal{L}(E,F)$.
Alors $\dim(E) = \dim(\ker f) + \dim(\mathrm{Im} f)$

2) Propriété : Soient E $\mathbb{R}$-ev de dim finie. et F et G 2 sev de E.
Si $\begin{cases} F \subset G \\ \dim F = \dim G \end{cases}$ alors $F = G$.

Ici par 2°) et Thm du Rang $\dim \mathrm{Im} f = \dim \mathbb{R}^2 - \dim \ker f$
$= 2 - 1 = 1 = \dim \mathbb{R}$.

or $\mathrm{Im} f \subset \mathbb{R}$ par def
CCL : $\mathrm{Im} f = \mathbb{R}$.

Exercice n°27 1) $\ker f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \; y+z=0$ et $x=0\}$
$= \left\{\begin{pmatrix}0\\y\\-y\end{pmatrix} ; y \in \mathbb{R}\right\} = \left\{y\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} ; y \in \mathbb{R}\right\} = \mathrm{Vect}\left(\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right\}\right)$.

Avoir une base permet de déduire la dimension

$\Rightarrow$ Un seul vecteur non nul $\Rightarrow$ Famille libre $\Rightarrow$ Base.

Ainsi $\left(\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right)$ est génératrice de $\ker f$ or $\underbrace{\left(\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right) \neq 0_{\mathbb{R}^3}}$ donc c'est aussi une famille libre.

CCL : $\left(\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right)$ base de $\ker f$. ← Non injective car

Donc $\dim(\ker f) = 1$.

2) Par thm du Rang, $\dim \mathbb{R}^3 = \dim \ker f + \dim \mathrm{Im} f$.
$\Rightarrow \dim(\mathrm{Im} f) = 3 - 1 = 2 = \dim \mathbb{R}^2$.
or $\mathrm{Im} f \subset \mathbb{R}^2$. Donc $\mathrm{Im} f = \mathbb{R}^2$.

Programme TD

Exercice n° 27.5 :

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x - 2y + 2z \\ -x + y - z \\ x + z \end{pmatrix}$

1) Ker f :

$\begin{cases} 2x - 2y + 2z = 0 \\ -x + y - z = 0 \\ x = -z \end{cases} \iff \begin{cases} 2x - 2y - 2x = 0 \\ -x + y + x = 0 \\ x = -z \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x = -z \\ y = 0 \\ z = -x \end{cases}$

$\ker f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + z = 0 \text{ et } y = 0\}$

$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -x \end{pmatrix} ; x \in \mathbb{R} \right\}$

$= \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} ; x \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect}\left(\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \right)$

Ainsi $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ est génératrice de ker f et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ donc c'est aussi une famille libre

CCL : $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ base de ker f. Donc $\dim(\ker f) = 1$.

2) • Par thm du Rang, $\dim \mathbb{R}^3 = \dim \ker f + \dim \text{Im} f$.

$\Rightarrow \dim \text{Im} f = 3 - 1 = 2$.

• $\text{Im} f = \{ v \in F\ \exists u \in E,\ v = f(u) \}$

$= \{ f(u),\ u \in E \}$

Ici $\text{Im} f = \left\{ f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) ; \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 2x - 2y + 2z \\ -x + y - z \\ x + z \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \right\}$

$= \left\{ x \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{e_1} + y \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{e_2} + z \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{e_3} , \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \right\}$

$= \text{Vect}(\{e_1, e_2, e_3\})$ or $e_1 = e_3$ d'où $\text{Im} f = \text{Vect}(\{e_1, e_2\})$