Module 32 : Mathématiques
Introduction aux espaces vectoriels

Le but est d'obtenir des théorèmes généraux. En revanche, la notion d'espace vectoriel est difficile à appréhender.

Définition : Un espace vectoriel est un ensemble formé de vecteurs de sorte que l'on puisse additionner (et soustraire) deux vecteurs u, v pour en former un troisième $u+v$ (ou $u-v$) et aussi afin que l'on puisse multiplier chaque vecteur u d'un facteur λ pour obtenir un vecteur λu.

Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est un ensemble non-vide E muni :

- d'une loi composition interne, c'est-à-dire d'une application de $E \times E$ dans E :

$$\begin{aligned} E \times E &\to E \\ (u,v) &\to u+v \end{aligned}$$

- d'une loi de composition externe, c'est-à-dire d'une application de $\mathbb{K} \times E$ dans E :

$$\begin{aligned} \mathbb{K} \times E &\to E \\ (\lambda, u) &\to \lambda u \end{aligned}$$

$\mathbb{K}$ est un corps (souvent $\mathbb{K} = \mathbb{R}$)

By Hyperion

Le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^2$

- Posons $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2 = E$
- Un élément $u \in E$ est donc un couple (x,y) avec $(x,y) \in \mathbb{R}^2$
- $\mathbb{R}^2 = \{(x,y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$
- Définition de la loi interne

  Si (x,y) et (x',y') sont deux éléments de $\mathbb{R}^2$, alors :
  $$(x,y)+(x',y') = (x'+x ; y+y')$$

- Définition de la loi externe

  Si λ est un réel et (x,y) est un élément de $\mathbb{R}^2$, alors :
  $$\lambda.(x,y) = (\lambda x, \lambda y)$$

- L'élément neutre de la loi interne est le vecteur nul $(0,0)$
- Le symétrique de (x,y) est $(-x,-y)$, que l'on note aussi $-(x,y)$

Le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^n$

- $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $E = \mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 1)$
- $u \in E$ est donc un n-uplet $(x_1, x_2, \dots ; x_{n-1} ; x_n)$
- Définition de la loi interne

  Si $(x_1, \dots, x_n)$ et $(x_1', \dots, x_n')$ sont deux éléments de $\mathbb{R}^n$, alors :
  $$(x_1, \dots, x_n) + (x_1', \dots, x_n') = (x_1 + x_1', \dots, x_n + x_n')$$

- Définition de la loi externe :

  Si λ est un réel et $(x_1, \dots, x_n)$ est un élément de $\mathbb{R}^n$, alors :
  $$\lambda.(x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$$

- L'élément neutre de la loi interne est le vecteur nul $(0, \dots, 0)$
- Le symétrique de $(x_1, \dots, x_n)$ est $(-x_1, \dots, -x_n)$ que l'on note $-(x_1, \dots, x_n)$

By Hyperion

Tout plan passant par l'origine dans $\mathbb{R}^3$ est un espace vectoriel

- Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et E un plan passant par l'origine
- Equation $ax+by+cz=0$
- Un élément u de E est un triplet $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tel que $ax+by+cz=0$
  - Soient $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ deux éléments de E
  - $ax+by+cz=0$ et $ax'+by'+cz'=0$
  - Donc $a(x+x') + b(y+y') + c(z+z') = 0$
  - Ainsi $u+v = \begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \\ z+z' \end{pmatrix} \in E$

- L'élément neutre est $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in E$
- Le symétrique est $-\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E$

Les éléments E sont des vecteurs
Les éléments de $\mathbb{K}$ sont des scalaires
L'élément neutre 0_E s'appelle aussi le vecteur nul
Le symétrique $-u$ d'un vecteur $u \in E$ s'appelle aussi l'opposé
La loi de composition interne sur E, notée $+$ est l'addition.

Somme de n vecteurs

- Somme de 2 vecteurs : $v_1 + v_2$
- Somme de n vecteurs : $v_1, v_2, \ldots, v_n$

  $v_1 + v_2 + \ldots + v_n = (v_1 + v_2 + \ldots + v_{n-1}) + v_n$

- $v_1 + v_2 + \ldots + v_n = \sum_{k=1}^{n} v_k$

By Hyperion

Exercices types :

Montrer que les ensembles ci-dessous sont des espaces vectoriels (sur $\mathbb{R}$) :

- $E_1 = \{f : [0,1] \to \mathbb{R}\}$: l'ensemble des fonctions à valeurs réelles définies sur l'intervalle $[0,1]$, muni de l'addition $f+g$ des fonctions et de la multiplication par un nombre réel $\lambda . f$
- $E_2 = \{(U_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}\}$: l'ensemble des suites réelles muni de l'addition des suites définies par $(U_n) + (V_n) = (U_n + V_n)$ et de la multiplication par un réel $\lambda . (U_n) = (\lambda U_n)$
- $E_3 = \{P \in \mathbb{R}[x] \mid \deg P \leq n\}$: l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n muni de l'addition $P + Q$ des polynômes et de la multiplication par un nombre réel $\lambda . P$

① $E_1 = \{f : [0,1] \to \mathbb{R}\}$ $\quad f+g$

$\lambda \in \mathbb{R}, f \to f.\lambda$

Il y a 8 propriétés à vérifier

1) $f + (g+h) = (f+g) + h$

$f(t) + (g(t) + h(t)) = (f(t) + g(t)) + h(t)$

→ Il n'y a que des réels, or dans $\mathbb{R}$, l'addition est associative

2) Vecteur nul . $\emptyset$

$(f + \emptyset)(t) = f(t) \Rightarrow f + 0 = f$

3) Opposé $(-f)(t) = -f(t)$

$(-f) + f = \emptyset$

4) $f + g = g + h$

$E_3 = \{P \in \mathbb{R}[x] \mid \deg P \leq n\}$ est un espace vectoriel

$P + Q \in E_3$

$\lambda P \in E_3$ où $\lambda \in \mathbb{R}$

By Hyperion

Définition d'un espace vectoriel

$E, +, .$ $\quad (x,y) \in E^2, \lambda \in \mathbb{R}, (x+y) \in E, \lambda . x \in E$

① $x+(y+z) = (x+y)+z$

② vecteur nul $\varnothing$

③ opposé $-x$

④ $x+y = y+x$

⑤ $1.x = x$

⑥ $\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y$

⑦ $(\lambda * \mu).x = \lambda(\mu * x)$

Module 33 : Mathématiques

Propriétés d'un espace vectoriel

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel

- Les éléments de E seront appelés des vecteurs
- les éléments du corps $\mathbb{K}$ seront appelés des scalaires

Loi interne

La loi de composition interne, c'est une application de $E \times E$ dans E :

$$E \times E \to E$$
$$(u,v) \to u+v$$

Loi externe

La loi de composition externe, c'est une application de $\mathbb{K} \times E$ dans E :

$$\mathbb{K} \times E \to E$$
$$(\lambda, u) \to \lambda u$$

Axiomes relatifs à la loi externe

(5) Soit 1 l'élément neutre de la multiplication de $\mathbb{K}$. $\forall u \in E$, on a

$$1 . u = u$$

(6) $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}$ et $\forall u \in E$, on a

$$\lambda.(\mu.u) = (\lambda.\mu).u$$

Axiomes liant les deux lois

(7) Distributivité par rapport à l'addition des vecteurs. $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall (u,v) \in E$ on a.

$$\lambda(u+v) = \lambda u + \lambda v$$

8) Distributivité par rapport à l'addition des scalaires

$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}$, $\forall u \in E$ on a :

$$(\lambda + \mu) u = \lambda u + \mu u$$

L'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

$\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$: l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

- Loi interne

Pour $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $f+g$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

- Loi externe

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, la fonction λf est définie par

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (\lambda f)(x) = \lambda \times f(x)$$

- Element neutre

L'élément neutre pour l'addition est la fonction nulle, définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$$

- Symetrique

Le symetrique de $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est défini par

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = -f(x)$$

By Hyperion

Axiomes relatifs à la loi interne

① Commutativité

Pour tout $(u,v) \in E$, $u+v = v+u$

② Associativité

$\forall (u,v,w) \in E$, on a $u+(v+w) = (u+v)+w$

③ Existence d'un élément neutre

$\exists$ un element de E, noté 0_E, verifiant :

$\forall u \in E$, $u + 0_E = u$.

▷ On a aussi $0_E + u = u$

▷ Cet élément s'appelle aussi le vecteur nul

④ Existence d'un symetrique

$\forall u \in E$, $\exists u' \in E$ tq $u+u' = 0_E$

▷ On a aussi $u'+u = 0_E$

▷ Cet élement u' est noté $-u$

Proposition :

- $\exists ! \, 0_E$
- $\forall u \in E$, $\exists ! \, u' \Rightarrow u' = -u$

Demonstration :

- Soient 0_E et $0_E'$ deux éléments neutres. Alors, $\forall u \in E$

(*) $u + 0_E = 0_E + u = u$ (**) $u + 0_E' = 0_E' + u = u$.

▷ Alors (*) avec $u = 0_E'$ donne $0_E' + 0_E = 0_E + 0_E' = 0_E'$

▷ Et (**) avec $u = 0_E$ donne $0_E + 0_E' = 0_E' + 0_E = 0_E$

▷ D'où $0_E = 0_E'$

- Si u' et u'' sont deux symetriques du même u, on a

$u+u' = u'+u = 0_E$ et $u''+u = u+u'' = 0_E$

▷ $u' + (u+u'') = u' + 0_E = u'$

▷ $u' + (u+u'') = (u'+u) + u'' = 0_E + u'' = u''$

▷ On en déduit que $u' = u''$

Le $\mathbb{R}$ - espace vectoriel des suites réelles

$S = \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$: l'ensemble des suites réelles $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$

- Loi interne

Pour $u = (U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $v = (V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites, la suite $u + v$ est la suite dont le terme général est : $U_n + V_n$

- Loi externe

Si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u = (U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite, alors $\lambda . u$ est la suite dont le terme général est $\lambda \times U_n$

- Élément neutre

L'élément neutre est la suite dont tous les termes sont nuls

- Symétrique

Le symétrique de $u = (U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite dont le terme général est $- U_n$

Les matrices

L'ensemble $M_{n,p}(\mathbb{R})$ des matrices à n lignes et p colonnes à coefficient dans $\mathbb{R}$, est muni d'une structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

- la loi interne est l'addition de deux matrices.
- la loi externe est la multiplication d'une matrice par un scalaire
- l'élément neutre pour la loi interne est la matrice nulle
- le symétrique de la matrice $A = (a_{ij})$ est la matrice $(-a_{ij})$

① L'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ des polynômes

- $P(X) = a_n X^n + \dots + a_2 X^2 + a_1 X + a_0$
- L'addition est l'addition de deux polynômes $P(X) + Q(X)$
- La multiplication par un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ est $\lambda . P(X)$
- L'élément neutre est le polynôme nul
- L'opposé de $P(X)$ est $- P(X)$

(2) L'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$
L'ensemble des fonction dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, ...
(3) ....

Soit E un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$
Soient $u \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$

Proposition
(1) $0 . u = 0_E$
(2) $\lambda . 0_E = 0_E$
(3) $(-1). u = -u$
(4) $\lambda . u = 0_E \Leftrightarrow \lambda = 0$ ou $u = 0_E$

- la soustraction $u - v = u + (-v)$
- $\lambda(u-v) = \lambda u - \lambda v$ et $(\lambda - \mu)u = \lambda u - \mu u$

Module 34 : Mathématiques
Définition d'un sous-espace vectoriel

I/ Définition d'un sous-espace vectoriel.

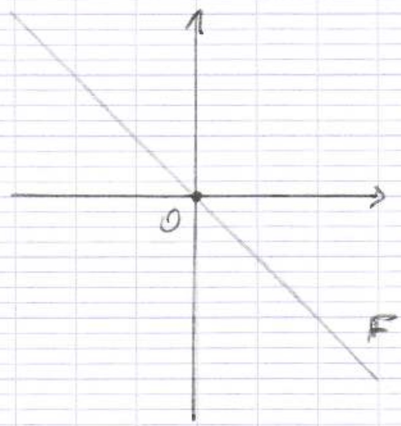
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel

Définition : Une partie F de E est appelé un sous-espace vectoriel si :

- $0_E \in F$
- $\forall (u,v) \in E$, $u+v \in F$
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall u \in F \Rightarrow \lambda u \in F$

Exemple :

$F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y=0\}$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$



① $(0,0) \in F$

② Δ Si $u = (x_1, y_1)$ et $v = (x_2, y_2) \in F$

Δ Alors $x_1 + y_1 = 0$ et $x_2 + y_2 = 0$

Δ Donc $(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) = 0$

Δ Et ainsi $u+v = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in F$

③ Δ Si $u = (x,y) \in$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

Δ Alors $x+y=0$ donc $\lambda x + \lambda y = 0$

Δ D'où $\lambda u \in F$

Exemple 2 :

- L'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$
  - Δ La fonction nulle est continue
  - Δ La somme de deux fonctions continues est continue
  - Δ Le produit d'une fonction continue par une constante est une fonction continue
- L'ensemble des suites réelles convergente est un sous espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites réelles.

Voici des des sous ensemble qui ne sont pas des sous-espace vectoriels

① $F_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y=2\}$ n'est pas un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$

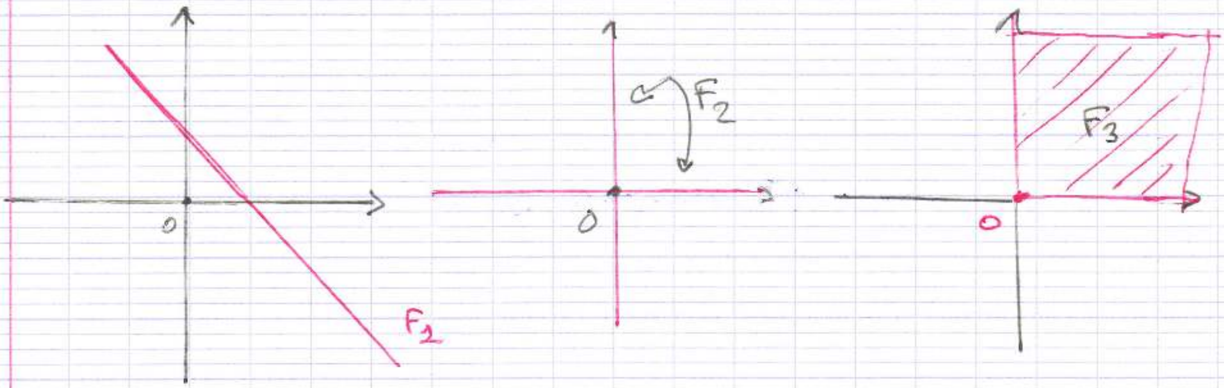
En effet, le vecteur nul $(0,0)$ n'appartient pas à F_1

② $F_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x=0$ ou $y=0\}$ n'est pas un sev de $\mathbb{R}^2$

En effet, $u=(1,0)$ et $v=(0,1) \in F_2$ mais $u+v=(1,1) \notin F_2$

③ $F_3 \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0$ et $y \geq 0\}$ n'est pas un sev de $\mathbb{R}^2$.

En effet, $v=(1,1) \in F_3$ mais pour $\lambda=-1$; $-v=(-1,-1) \notin F_3$



II / Propriété fondamentale d'un sous espace vectoriel.

Théorème : Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E

Alors F est lui-même un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour les lois induites par E

Méthodologie "L'ensemble F est-il un espace vectoriel ?"

- Trouver un espace vectoriel E qui contiendrait F
- Prouver que F est un sous-espace vectoriel de E

Exemple:

① Est-ce que l'ensemble $\mathcal{P}$ des fonctions paires forment un sous espace vectoriel ?

▷ $\mathcal{P}$ sous-ensemble de l'espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$

▷ $\mathcal{P} = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid \forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x)\}$

P est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

① la fonction nulle est une fonction paire

② si $f, g \in P$ alors $f+g \in P$

③ si $f \in P$ et si $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $\lambda f \in P$

Par le théorème P est un espace vectoriel

② L'ensemble des fonctions impaires

$\mathcal{I}$ $\mathcal{I} = \{ f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}; \mathbb{R}) \mid \forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = -f(x) \}$ est un

$\mathcal{I}$ espace vectoriel

③ L'ensemble S_n des matrices symétriques est un espace vectoriel.

- $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$
- $AX = 0$ un système de n équations à p inconnues
- $$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Théorème : L'ensemble des vecteurs X solutions de $AX=0$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^p$

Démonstration : soit F l'ensemble des vecteurs $X \in \mathbb{R}^p$ solutions de l'équation $AX=0$

- $0 \in F$
- F est stable par addition : si $AX=0$ et $AX'=0$ alors $A(X+X') = AX+AX' = 0$
- F est stable par multiplication par un scalaire : si $AX=0$ alors $A(\lambda X) = 0$

Maths

01/02

Rappel : pre espace vectoriel

E un ensemble

a un ensemble de E

On note $a \in E$

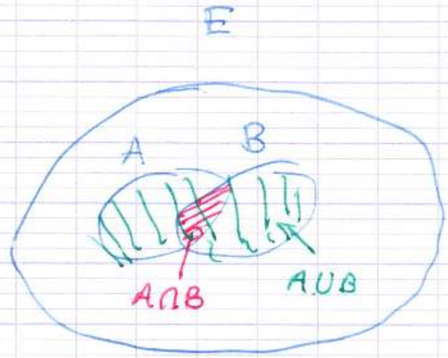
appartient à

A sous ensemble de E

On note $A \subset E$

inclus dans.

Soient A et B deux sous ensembles de E.



$A \cap B$: Intersection

$x \in A \cap B$ ssi $x \in A$ ET $x \in B$

$A \cup B$: Réunion

$x \in A \cup B$ ssi $x \in A$ OU $x \in E$

$A \cap B \subset A \cup B$

$$A \cap B = \{ x \in E \text{ tq } x \in A \text{ et } x \in B \}$$

$$\mathbb{R}^2 = \{ (x,y) \, ; \, x \in \mathbb{R} \, ; \, y \in \mathbb{R} \}$$

$$\mathbb{R}^3 = \{ (x,y,z) \, ; \, x \in \mathbb{R} \, ; \, y \in \mathbb{R} \, ; \, z \in \mathbb{R} \}$$

$F = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 , \, x+y+z=0 \}$ et $F \subset \mathbb{R}^3$

$u = (1,2,-3) \in F$ $\quad 0_{\mathbb{R}^3} = (0,0,0) \in F$

$v = (1,2,3) \notin F$

$G = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 , \, xy = 0 \}$

$u = (18,0,32) \in G$

$v = (0,1,2) \in G$

$u+v = (18,1,34) \notin G$

E

$+ \quad E \times E \longrightarrow E$
$\quad (u,v) \longmapsto u+v$

$\bullet \quad \mathbb{R} \times E \longrightarrow E$
$\quad (\lambda, u) \longmapsto \lambda . u$

Ex : $E = \mathbb{R}^2 \quad u = (x,y)$
$\quad v = (x', y')$

$u + v = (x + x' ; y + y')$
$\lambda u = (\lambda x, \lambda y)$

$* \ \forall (u,v,w) \in E^3 \quad u+v = v+u$
$\quad (u+v) + w = u + (v+w)$

$*$ $\exists !$ element $\in E$, noté 0_E tq

$\forall u \in E \quad u + 0_E = u$

$* \ \forall u \in E$, $\exists !$ element de E noté $-u$
$u + (-u) = 0_E$

$* \ \forall (u,v) \in E^2, \ \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$
$\lambda . (u+v) = \lambda u + \lambda v$
$(\lambda + \mu) . u = \lambda u + \mu u.$
$\lambda(\mu . u) = (\lambda \mu) . u.$
$1 . u = u.$

Prop Soit $(u, v, w) \in E^3$

$u+v = u+w \Rightarrow v = w$

Preuve : On a

$u+v = u+w$

$\Rightarrow -u + (u+v) = -u + (u+w)$

$\Rightarrow (-u+u)+v = (-u+u)+w$

$\Rightarrow 0_E + v = 0_E + w$

$\Rightarrow v = w.$

Les $\mathbb{R}$ - espaces vectoriels de références sont

* $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid \forall i \in [\![1, n]\!]\ x_i \in \mathbb{R}\}$

  $0_{\mathbb{R}^n} = (0, \dots, 0)$

* $\mathbb{R}^I = \{f : I \to \mathbb{R}\}$

  $0_{\mathbb{R}^I} : \begin{array}{l} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 0 \end{array}\Big\}$ fct nulle

* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}$ = suite nulle

* $\mathbb{R}[X]$, $0_{\mathbb{R}[X]}$ polynôme nul

Exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 6 \\ 3 & -6 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Solution de ce système :

  $F = \{(x = 2s - 3t, y = s, z = t) \mid s, t \in \mathbb{R}\}$
- F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$
- F est un espace vectoriel
- Autre vision : F d'équation $(x = 2y - 3z)$, c'est un plan passant par l'origine.

Module 35 : Mathématiques
Combinaisons linéaires, caractérisation et intersections d'espaces vectoriels

I/ Combinaison linéaire

Soient $v_1, v_2, \ldots, v_n$, n vecteurs d'un espace vectoriel E

Définition : • Tout vecteur de la forme :

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n$$

est appelé combinaison linéaire des vecteurs $v_1, v_2, \ldots, v_n$

- les scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ sont les coefficients de la combinaison linéaire

Remarque : Si $n = 1$, alors $v = \lambda_1 v_1$ et on dit que v est colinéaire à v_1

Exemple :

① Dans le $\mathbb{R}$ - espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, $(3,3,1)$ est combinaison linéaire des vecteurs $(1,1,0)$ et $(1,1,1)$ car on a

$$(3,3,1) = 2(1,1,0) + (1,1,1)$$

② Dans le $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{R}^2$, le vecteur $v = (2,1)$ n'est pas colinéaire au vecteur $v_1 = (1,1)$

③ Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et f_0, f_1, f_2 et f_3 les fonctions définies par :

$$f_0(x) = 1 \ ; \ f_1(x) = x \ ; \ f_2(x) = x^2 \ ; \ f_3(x) = x^3$$

Alors la fonction f définie par $f(x) = x^3 - 2x^2 - 7x - 4$ est combinaison linéaire des fonctions f_0, f_1, f_2, f_3 puisque l'on a :

$$f = f_3 - 2f_2 - 7f_1 - 4f_0$$

Exemple :

- Soient $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$
- Montrons que $w = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$ est combinaison linéaire de u et v
- On cherche donc λ et μ tels que $w = \lambda u + \mu v$
- $\begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 2\lambda \\ -\lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6\mu \\ 4\mu \\ 2\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + 6\mu \\ 2\lambda + 4\mu \\ -\lambda + 2\mu \end{pmatrix}$

- Equivaut à $\begin{cases} 9 = \lambda + 6\mu \\ 2 = 2\lambda + 4\mu \\ 7 = -\lambda + 2\mu \end{cases}$

- Une solution de ce système est $(\lambda = -3$ et $\mu = 2)$
- Ce qui implique que w est la combinaison linéaire de u et v

$$\begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Exemple :

- Soient $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$
- Montrons que $w = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}$ n'est pas combinaison linéaire de u et v.
- $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 4 = \lambda + 6\mu \\ -1 = 2\lambda + 4\mu \\ 8 = -\lambda + 2\mu \end{cases}$
- Or ce système n'a aucune solution. Donc il n'existe pas $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels

que $w = \lambda u + \mu v$.

II / 1 - Caractérisation et intersection d'espaces vectoriels

Théorème : Caractérisation par la notion de combinaison linéaire

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F une partie non-vide de E.

F est un sous-espace vectoriel de E ssi

$$\lambda u + \mu v \in F \quad \forall (u,v) \in F \quad \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}$$

Autrement dit ssi toute combinaison linéaire de deux éléments de $F \in F$

Soient F, G, deux sous-espaces vectoriels d'$\mathbb{K}$-ev E

Proposition : L'intersection $F \cap G$ est un sev de E

$F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap \ldots \cap F_n$ est un sev

Démonstration :

- $0_E \in F$, $0_E \in G$ donc $0_E \in F \cap G$
- Soient $(u,v) \in (F \cap G)^2$

Δ F est un sev, alors $(u,v) \in F \Rightarrow u+v \in F$

Δ De même $(u,v) \in G^2 \Rightarrow u+v \in G$

Δ Donc $u+v \in F \cap G$

- Soient $u \in F \cap G$ et $k \in \mathbb{K}$
  - F est sev alors $u \in F \Rightarrow \lambda u \in F$
  - De même $u \in G \Rightarrow \lambda u \in G$
  - Donc $\lambda u \in F \cap G$

CCL: $F \cap G$ est un sev de E

Exemple:

$D = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x + 3y + z = 0 \text{ et } x - y + 2z = 0 \}$

- $F = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 3y + z = 0 \}$
- $G = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + 2z = 0 \}$
- F et G sont des plans vectoriels

$D = F \cap G$ est un sev.

La réunion de 2 sev n'est pas en général un sev.

- $F = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \}$ et $G = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0 \}$
- $(0,1) \in F$, $(1,0) \in G$
- $(0,1) + (1,0) = (1,1) \notin F \cup G$
- $F \cup G$ n'est pas un sev

Maths
S2
7

Module 36 : Mathématiques

Somme, sous-espace vectoriel engendré

I / Somme de deux sous-espaces vectoriels.

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E

Définition : L'ensemble de tous les éléments u+v, où u est un élément de F et v un élément de G, est appelé somme des sev F et G

$$F+G = \{u+v \mid u \in F \quad v \in G\}$$
$$= \{u \in E,\ \exists (u_1,u_2) \in F \times G \quad u = u_1 + u_2\}$$

Proposition

① F+G est un sev de E

② F+G est le plus petit sev contenant F et G

Exemple :

$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = z = 0\}$ et $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = z = 0\}$

- Un élément w de F+G s'écrit $w = u+v$ où $u \in F$ et $v \in G$
- Comme $u \in F$, $u = (x,0,0)$
- Comme $v \in G$, $v = (0,y,0)$
- Donc $w = (x,y,0)$
- $F+G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$

Exemple :

$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x=0\}$ et $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y=0\}$

- Montrons que $F+G = \mathbb{R}^3$
- Soit $w = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$
- $w = (x,y,z) = (0,y,z) + (x,0,0)$, avec $(0,y,z) \in F$ et $(x,0,0) \in G$
- Donc $w \in F+G$
- Pas unicité, $(1,2,3) = (0,2,3) + (1,0,0) = (0,2,0) + (1,0,3)$

II 1- Somme directe et sous-espaces vectoriels supplémentaires.

Soient F et G deux sev de E

Définition:

F et G sont en somme directe dans E si

- $F \cap G = \{0_E\}$
- $F + G = E$

On note alors $F \oplus G = E$

F et G sont des sev supplémentaires dans E.

Proposition:

F et G sont supplémentaires dans E ssi tout élément de E s'écrit d'une manière unique comme la somme d'un élément de F et d'un élément de G

Ecriture unique : si $\begin{cases} w = u+v \\ w = u'+v' \end{cases}$ avec $\begin{cases} u \in F, v \in G \\ u' \in F, v' \in G \end{cases}$ alors $\begin{cases} u = u' \\ v = v' \end{cases}$

Exemple:

① $F = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$ et $G = \{(0,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in \mathbb{R}\}$

- $F \oplus G = \mathbb{R}^2$?
- $F \cap G = \{(0,0)\}$
- $F + G = \mathbb{R}^2$ car $(x,y) = (x,0) + (0,y)$
- CCL: $F \oplus G = \mathbb{R}^2$
- Autre méthode : la décomposition $(x,y) = (x,0) + (0,y)$ est unique

② Gardons F et notons $G' = \{(x,x) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$. Montrons que l'on a aussi $F \oplus G' = \mathbb{R}^2$

- $F \cap G' = \{(0,0)\}$
- $F + G' = \mathbb{R}^2 : (x,y) = (x-y,0) + (y,y)$

③ Deux droites distinctes du plan passant par l'origine forment des sev supplémentaires

Exemple :

$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x-y-z=0\}$

$G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y=z=0\}$

- $F \cap G = \{0\}$: si $u=(x,y,z) \in F\cap G$ alors $x-y-z=0$ (car $u \in F$) et $y=z=0$ (car $u \in G$) donc $u=(0,0,0)$
- Montrons que $F+G=\mathbb{R}^3$
  - Soit $u=(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$
  - On cherche $v \in F$ et $w \in G$ tels que $u = v+w$
  - $v=(y_1+z_1, y_1, z_1)$ et $w=(x_2,0,0)$
  - Donc $(x,y,z) = (y_1+z_1+x_2, y_1, z_1)$
  - Ainsi $y_1 = y$, $z_1 = z$, $x_2 = x-y-z$
  - $(x,y,z) = (y+z,y,z)+(x-y-z,0,0) \in F+G$

CCL : $F \oplus G = \mathbb{R}^3$

Exemple :

$E = \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, P fonction paires, I fonction impaires

Montrons $P \oplus I = \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$

① Montrons $P \cap I = \{0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}\}$
- Soit $f \in P \cap I$
- Soit $x \in \mathbb{R}$. $f(-x)=f(x)$ et $f(-x)=-f(x)$, alors $f(x)=-f(x)$ ce qui implique $f(x)=0$
- f est la f^{o} nulle

② Montrons $P+I = \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$
- Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$
- $g(x) = \dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$, g est paire
- $h(x) = \dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$, h est impaire
- $f(x) = g(x)+h(x)$

Trad cours :

On appelle sev engendré par A l'intersection de tous les sev de F qui contiennent A. On le note Vect(A)

$\mathrm{Vect}(A) = \bigcap_{\substack{F \text{ sev de } E \\ A \subset F}} F$

• Vect(A) est sev de E car $\cap$ de E

• $A \subset \mathrm{Vect}(A)$

III 1- Sous-espaces vectoriel engendré

Soit $\{v_1, \dots, v_n\}$ des vecteur d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E

Théorème :

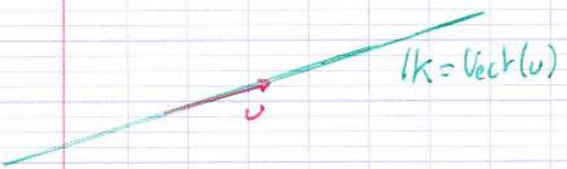
• L'ensemble des combinaison linéaire des vecteur $\{v_1, \dots, v_n\}$ est un sev de E.

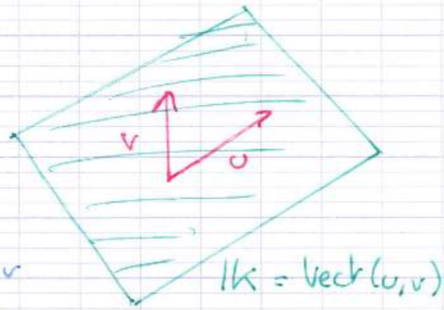
• C'est le + petit sev de E contenant les vecteur $v_1, \dots, v_n$.

C'est le sous espace engendré par $\underbrace{v_1, \dots, v_n}_{A}$ noté $\mathrm{Vect}(\underbrace{v_1, \dots, v_n}_{A})$

$$u \in \mathrm{Vect}(\underbrace{v_1, \dots, v_n}_{A}) \iff \exists (\lambda_1, \dots \lambda_n) \in \mathbb{K}^n,\ u = \lambda_1 v_1, \dots, \lambda_n v_n$$

① Droite vectorielle $\mathrm{Vect}(u) = \{\lambda u \mid \lambda \in \mathbb{K}\} = \mathbb{K}u \quad (u \neq 0_E)$





② $\mathrm{Vect}(u,v) = \{\lambda u + \mu v \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2\}$. Si u et v ne sont pas colinéaire, c'est un plan vectoriel

③ $u = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Déterminons $\mathcal{P} = \mathrm{Vect}(u,v)$

$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathrm{Vect}(u,v) \iff \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \lambda u + \mu v$ pour certains $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$\iff \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \iff \begin{cases} x = \lambda + \mu \\ y = \lambda + 2\mu \\ z = \lambda + 3\mu \end{cases}$$

Equation cartesienne : $(x - 2y + z = 0)$

④ $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $f_0(x) = 1$, $f_1(x) = x$ et $f_2(x) = x^2$

$\mathrm{Vect}(f_0, f_1, f_2) = \{f \mid f(x) = ax^2 + bx + c\} = \mathbb{R}_2[x]$

Module 37 : Mathématiques
Définition d'une application linéaire.

I/- Définition et exemples d'applications linéaires

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espace vectoriels

Définition :

Une application f de E dans F est une application linéaire si :

- $\rightarrow f(u+v) = f(u) + f(v) \quad \forall (u,v) \in E^2$
- $\rightarrow f(\lambda u) = \lambda f(u), \ \forall u \in E$ et $\forall \lambda \in \mathbb{K}$

L'ensemble de toutes les applications linéaire de E dans F est noté $\mathcal{L}(E,F)$.

Exemple :

- $\begin{cases} f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) \mapsto (-2x, y+3z) \end{cases}$

- f est une application linéaire
- Soient $u = (x,y,z)$ et $v = (x',y',z')$ de $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} f(u+v) &= f(x+x', y+y', z+z') \\ &= (-2(x+x'), y+y'+3(z+z')) \\ &= (-2x, y+3z) + (-2x', y'+3z') \\ &= f(u)+f(v) \end{aligned}$$

- Soient $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(\lambda u) &= f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) \\ &= (-2\lambda x, \lambda y + 3\lambda z) \\ &= \lambda(-2x, y+3z) \\ &= \lambda f(u) \end{aligned}$$

Exemple d'application non linéaire : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = x^2$

- On a $f(1) = 1$ et $f(2) = 4$. Donc $f(2) \neq 2 \cdot f(1)$
- On n'as pas toujours l'égalité $f(\lambda x) = \lambda f(x)$
- Donc f n'est pas linéaire
- On n'a pas non plus $f(x + x') = f(x) + f(x')$ (dès que $xx' \neq 0$)

Autres exemples :

① Pour une matrice fixée $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$, l'application $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ définie par : $f(X) = AX$. est une application linéaire.

② L'application nulle, notée $0_{\mathcal{L}(E,F)}$:

$f : E \to F$, $f(u) = 0_F$ $\forall u \in E$

③ L'application identité, notée id_E

$f : E \to F$, $f(u) = u$ $\forall u \in E$.

II / Propriété d'une application linéaire

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels

Proposition :

Si $f : E \to F$ est une application linéaire, alors

- $f(0_E) = 0_F$
- $f(-u) = -f(u)$ $\forall u \in E$

Proposition :

$f : E \to F$ est une application linéaire ssi $\forall (u,v) \in E^2$ $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$:

$$f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v)$$

Vocabulaire :

- Une application linéaire de E vers F est aussi appelé morphisme d'espaces vectoriels
- L'ensemble des applications linéaires de E dans F est notée $\mathcal{L}(E,F)$
- Une application linéaire de E dans E est appelée endomorphisme de E
- L'ensemble des endormorphisme de E est notée $\mathcal{L}(E)$

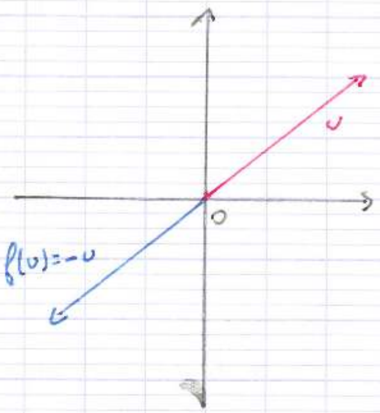
Module 38 : Mathématiques
Exemples d'application linéaires

Symetrie centrale

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel

$f : E \to E$

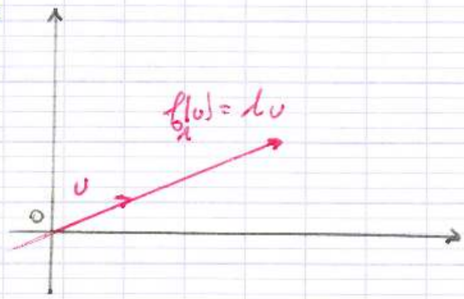
$u \mapsto -u$



Homothétie de rapport $\lambda \in \mathbb{K}$

$f_\lambda : E \to E$

$u \mapsto \lambda u$

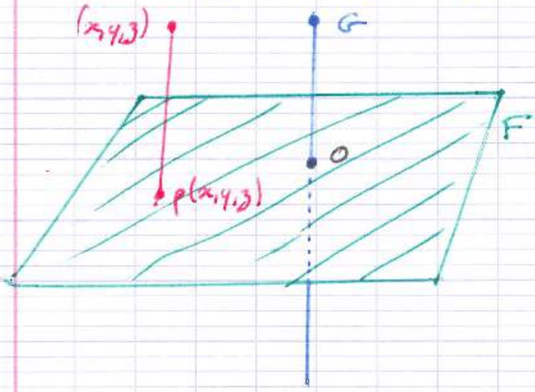


$f_\lambda(\alpha u + \beta v) = \lambda(\alpha u + \beta v) = \alpha(\lambda u) + \beta(\lambda v) = \alpha f_\lambda(u) + \beta f_\lambda(v)$

Projection :

- Soient F et G deux sous espaces vectoriels supplementaires d'un espace vectoriel E : $F \oplus G = E$
- Tout vecteur u de E s'écrit de façon unique $u = v + w$ avec $v \in F$ et $w \in G$
- La projection sur F parrallélement à G est l'application $p : E \to E$ definie par $p(u) = v$.

- Une projection est une application linéaire
- Une projection p vérifie l'égalité $p^2 = p$.



Exemple:

- $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x-y-z=0\}$
- $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y=z=0\}$
- $F \oplus G = \mathbb{R}^3$
- $(x,y,z) = (y+z,y,z) + (x-y-z,0,0)$
- Projection p sur F parallèlement à G : $p(x,y,z) = (y+z,y,z)$

Exemple:

- $\mathcal{P}$ l'ensemble des fonctions paires
- $\mathcal{I}$ l'ensemble des fonctions impaires
- $\mathcal{P} \oplus \mathcal{I} = \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$
- Notons p la projection sur $\mathcal{P}$ parrallèlement à $\mathcal{I}$
- Si f est un element de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on à $p(f) = g$ où

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{f(x)+f(-x)}{2}$$

- Derivation
  - $d : C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \longrightarrow C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $f \longmapsto f'$
  - d est une application linéaire
  - car $(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$ et donc $d(\lambda f + \mu g) = \lambda d(f) + \mu d(g)$