Contrôle TD 4

Nom : **Prénom :** **Classe :**

Question de cours

Soient E et F deux $\mathbb{R}$-ev, et $\varphi \in \mathscr{L}(E,F)$ une application linéaire de E dans F.

a. Donner la définition mathématique précise de $\mathrm{Ker}(\varphi)$ et $\mathrm{Im}(\varphi)$.

b. À quelle condition φ est-elle injective ? À quelle condition φ est-elle surjective ? Répondez à ces deux questions en vous servant obligatoirement des notions de la question précédente.

Exercice 1

Soit $\Delta : \begin{cases} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto XP' - 2P \end{cases}$. Montrer que Δ est linéaire.

Exercice 2

Soient $E = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ u_0 = u_1 = 0\}$ et $F = \{(v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \exists\,(a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ v_n = an + b\}$ deux sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
Montrer que E et F sont supplémentaires.

[suite du cadre page suivante]

Exercice 3

Soit $E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } \left| \begin{array}{l} -x - 3y + 2z = 0 \\ -x + y - 2z = 0 \\ -x + 3y - 4z = 0 \end{array} \right. \right\}$. Écrire E sous forme de sev engendré en utilisant la notation Vect.