Corrigé du partiel 2

Exercice 1 (2 points)

Soient $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. On a

$$AU = V \Longleftrightarrow U = A^{-1}V$$

Or

$$AU = V \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcll} x + 2y + 3z & = & X & (1) \\ -x - y + z & = & Y & (2) \\ 2x + 4y + 5z & = & Z & (3) \end{array} \right. \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcc} x + 2y + 3z & = & X \\ y + 4z & = & X + Y \\ -z & = & Z - 2X \end{array} \right.$$

(On a conservé (1), on a remplacé (2) par (2) + (1) et (3) par (3) − 2 · (1)). D'où

$$AU = V \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcc} x & = & 9X - 2Y - 5Z \\ y & = & -7X + Y + 4Z \\ z & = & 2X - Z \end{array} \right. .$$

Finalement

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -2 & -5 \\ -7 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 9 & -2 & -5 \\ -7 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 2 (4 points)

1. $F(X) = \dfrac{a}{X-1} + \dfrac{b}{X-2} + \dfrac{c}{X+2}$.

   En multipliant cette égalité par $X - 1$ puis en prenant la valeur $X = 1$ on trouve $a = -1/3$.

   En multipliant cette égalité par $X - 2$ puis en prenant la valeur $X = 2$ on trouve $b = 5/4$.

   En multipliant cette égalité par $X + 2$ puis en prenant la valeur $X = -2$ on trouve $c = 1/12$.

   Donc
   $$F(X) = -\frac{1}{3(X-1)} + \frac{5}{4(X-2)} + \frac{1}{12(X+2)}$$

2. En effectuant la division euclidienne de $X^4 + X^3 + X^2 + 2X + 2$ par $(X-1)^2(X+1) = X^3 - X^2 - X + 1$ on a
   $$X^4 + X^3 + X^2 + 2X + 2 = (X^3 - X^2 - X + 1)(X + 2) + 4X^2 + 3X$$

   donc $G(X) = X + 2 + \dfrac{4X^2 + 3X}{(X-1)^2(X+1)}$.

   Or $R(X) = \dfrac{4X^2 + 3X}{(X-1)^2(X+1)} = \dfrac{a}{X+1} + \dfrac{b}{X-1} + \dfrac{c}{(X-1)^2}$.

   En multipliant cette égalité par $X + 1$ et en prenant la valeur $X = -1$, on a $a = 1/4$.

   En multipliant la même par $(X - 1)^2$ et en prenant la valeur $X = 1$, on a $c = 7/2$.

En prenant la valeur particulière 0, on obtient $b = 15/4$.

Ainsi

$$G(X) = X + 2 + \frac{1}{4(X+1)} + \frac{15}{4(X-1)} - \frac{7}{2(X-1)^2}$$

3. $H(X) = \dfrac{a}{X+1} + \dfrac{bX+c}{X^2+X+1}$.

   En multipliant cette égalité par $X+1$ et en prenant la valeur $X=-1$, on a $a=1$.

   Donc $H(X) = \dfrac{1}{X+1} + \dfrac{bX+c}{X^2+X+1}$.

   En prenant la valeur particulière 0, on a $-1 = 1 + c$ donc $c = -2$ d'où $H(X) = \dfrac{1}{X+1} + \dfrac{bX-2}{X^2+X+1}$.

   Enfin en prenant la limite en $+\infty$ de $XH(X)$, on a $2 = 1 + b$ donc $b = 1$.

   d'où $H(X) = \dfrac{1}{X+1} + \dfrac{X-2}{X^2+X+1}$.

Exercice 3 (2 points)

Supposons f injective et montrons que $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$. L'inclusion $\{0\} \subset \mathrm{Ker}(f)$ est immédiate. Montrons l'inclusion réciproque.

Soit $x \in \mathrm{Ker}(f)$. Alors $f(x) = 0 = f(0)$. Or f injective donc $x = 0$.

Supposons $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$ et montrons l'injectivité de f.

Soit $(x,y) \in E^2$ tel que $f(x) = f(y)$. Alors, via la linéarité de f, $f(x-y) = 0$ donc $x - y \in \mathrm{Ker}(f)$.

Or $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$ donc $x - y = 0$ soit $x = y$ et f est donc injective.

Exercice 4 (3 points)

1. Soit $\mathscr{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

   Alors $f(1) = 2X$; $f(X) = X^2$ et $f(X^2) = 0$ donc $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Soit $\mathscr{B} = \left(E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

   Alors $f\big(E_{11}\big) = E_{22}$; $f\big(E_{12}\big) = -E_{21}$; $f\big(E_{21}\big) = -E_{12}$ et $f\big(E_{22}\big) = E_{11}$ donc $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 5 (2,5 points)

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons $\mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Im}(u) = \{0\}$ et montrons que $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}\big(u^2\big)$.

L'inclusion $\mathrm{Ker}(u) \subset \mathrm{Ker}\big(u^2\big)$ est immédiate. Montrons que $\mathrm{Ker}\big(u^2\big) \subset \mathrm{Ker}(u)$.

Soit $x \in \mathrm{Ker}\big(u^2\big)$. Alors $u^2(x) = u\big(u(x)\big) = 0$. Ainsi $u(x) \in \mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Im}(u)$. Or $\mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Im}(u) = \{0\}$.

Ainsi $u(x) = 0$ et $x \in \mathrm{Ker}(u)$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons que $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}\big(u^2\big)$ et montrons que $\mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Im}(u) = \{0\}$.

L'inclusion $\{0\} \subset \mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Im}(u)$ est évidente. Montrons l'inclusion réciproque.

Soit $x \in \mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Im}(u)$. Alors $u(x) = 0$ et il existe $z \in E$ tel que $x = u(z)$.

Ainsi $0 = u(x) = u\big(u(z)\big)$ donc $z \in \mathrm{Ker}\big(u^2\big)$ or $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}\big(u^2\big)$ donc $z \in \mathrm{Ker}(u)$ d'où $x = u(z) = 0$.

Exercice 6 (2,5 points)

1. $v - w = 2u$ donc les vecteurs u, v et w sont liés. Ainsi ils ne forment pas une base de $\mathbb{R}^3$.

2. Montrons que les vecteurs f et g sont libres.

   Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\alpha f + \beta g = 0$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\alpha f(x) + \beta g(x) = 0$ donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

   $$\alpha \cdot \frac{e^x + e^{-x}}{2} + \beta \cdot \frac{e^x - e^{-x}}{2} = 0$$

   Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(\alpha + \beta)e^x + (\alpha - \beta)e^{-x} = 0$.

   En particulier, pour $x = 0$, on a immédiatement $\alpha = 0$.

   Puis, pour $x = \ln(2)$, on a $2(\alpha + \beta) + \dfrac{\alpha - \beta}{2} = 0$ soit finalement, vu que $\alpha = 0$, $\beta = 0$.

   Comme la famille (f, g) est libre et, par définition de F, engendre F, (f, g) forme une base de F.

   Cette base contenant deux vecteurs, on en déduit que la dimension de F est 2.

Exercice 7 (5 points)

1. $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$.

2. $f(u_1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} = 3u_1$; $f(u_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2u_2$ et $f(u_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = u_3$ donc $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(id) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

   $D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Donc $D = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)$.

4. $D^2 = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $D^3 = \begin{pmatrix} 27 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc, via une récurrence immédiate (non demandée), on peut en déduire que $D^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

5. $A = PDP^{-1}$ donc $A^2 = PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^2P^{-1}$.

   On peut ainsi en déduire, via une récurrence immédiate (non demandée) que $A^n = PD^nP^{-1}$.