Physique

27/01

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T} \rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m}}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

A.N

$$2\pi\sqrt{\frac{200\times10^{-3}}{10}} = 2\pi\sqrt{2}\sqrt{10^{-2}} = 2\pi\sqrt{2}\,10^{-1} = 0{,}28\pi \text{ sec.}$$

4) pas de frottement $\Rightarrow E_m = \text{constante} \Rightarrow \frac{dE_m}{dt} = 0$

$$E_m(t) = E_c(t) + E_{pe}$$
$$= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$
$$= \frac{1}{2}m(\dot{x}(t))^2 + \frac{1}{2}k(x(t))^2$$

$$\frac{dE_m}{dt} = \frac{1}{2}m\frac{d}{d\dot{x}}(\dot{x}^2)\times\frac{d\dot{x}}{dt} + \frac{1}{2}k\frac{d}{dx}(x^2)\times\frac{dx}{dt} = 0$$
$$= \frac{1}{2}m(2\dot{x})\times\ddot{x} + \frac{1}{2}k(2x)\times\dot{x} = 0$$

$$\frac{dE_m}{dt} = 0 \Rightarrow m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x} = 0$$
$$\dot{x}\underbrace{[m\ddot{x} + kx]}_{} = 0 \ \forall t$$

$$\Rightarrow \underbrace{m\ddot{x} + kx}_{=0} = 0$$
$$\boxed{\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0}$$ même eqt diff que dans la question 2°

Exercice n°2 :

Vitesse en Base de Frenet $= R\dot{\theta}$

1) $E_c = \frac{1}{2}mv^2$ avec $v = L\dot{\theta}$ (base de Frenet)

$E_c = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2$

2) $E_p = mgz$ avec $z = L(1-\cos(\theta))$

$E_p = mgL(1-\cos(\theta))$

3) $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_{pp}$

$$= \frac{1}{2} m L^2 (\theta(t))^2 + mgL\,(1 - \cos(\theta(t)))$$

4) $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_{pp}$

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} m \ell^2 (\dot{\theta}(t))^2 + mg\ell\,(1 - \cos(\theta(t)))$$

$$\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = \frac{1}{2} m \ell^2 \left[\frac{d\dot{\theta}^2}{d\dot{\theta}} \times \frac{d\dot{\theta}}{dt}\right] - mg\ell \frac{d}{d\theta}(\cos(\theta)) \times \frac{d\theta}{dt}$$

$$= \frac{\cancel{1}}{\cancel{2}} m \ell^2 (\cancel{2}\dot{\theta}) \times \ddot{\theta} - mg\,\ell(-\sin(\theta)) \times \dot{\theta}$$

$$= m\dot{\theta}\ell\,[\ell\ddot{\theta} + g\sin(\theta)] = 0 \quad \forall t$$

$$= \ell\ddot{\theta} + g\sin(\theta) = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin(\theta) = 0$$

petites oscillations $\sin\theta \simeq \theta$ (rad)

$$\ddot{\theta} + \underbrace{\frac{g}{\ell}}_{\omega_0^2}\theta = 0$$

- On identifie $\omega_0^2 = \frac{g}{\ell} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$

- Période : $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{\ell}}} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$.

$\cancel{\frac{d\mathcal{E}_m}{dt}}$

Exercice n°3 : $-kx - \alpha\dot{x} = m\ddot{x}$

$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = 0$

$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \underbrace{\frac{k}{m}}_{\omega_0^2}x = 0$

$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$

equation differentiel du mouv en prescence des frottements

Si $\alpha = 0$, pas de frottem—

On retrouve $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$, equat° differentielle d'un oscillateur harmonique.

3) Regimes d'oscillation :

$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$

l'equation caractéristiques : $r^2 + \frac{\alpha}{m}r + \omega_0^2 = 0$

$\Delta = \left(\frac{\alpha}{m}\right)^2 - 4\omega_0^2$

Signe de Δ :

Condition sur le coef de frottements α

- $\Delta < 0$ (2 solution complexes conjuguées)

$\left(\frac{\alpha}{m}\right)^2 < 4\omega_0^2$ | $\alpha < 2\omega_0 m$ | $2.7.200.10^{-3}$

$2,8\ N.m^{-1}s$

$\frac{\alpha}{m} < 2\omega_0$ | $\alpha < 2,8$

Pseudo périodique : $\frac{\alpha}{m} < 2\omega_0$

Critique : $\alpha = 2m\omega_0$

Apériodique : $\alpha > 2m\omega_0$

4) $\frac{dE_m}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2\right)$

$\frac{dE_m}{dt} = m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x}$

$= \underbrace{\dot{x}}_{v_x}(\underbrace{m\ddot{x} + kx}_{f_x})$ or l'équat° diff : $m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = 0$

$m\ddot{x} + kx = -\alpha\dot{x}$

$= \dot{x}(-\alpha\dot{x})$

$= \underbrace{-\alpha}_{>0}\underbrace{\dot{x}^2}_{>0}$

$\frac{dE_m}{dt} < 0$ (Logique E_m dimunie à cause des frottements.

$\frac{dE_m}{dt} = v_x \cdot f_x$

$\frac{dE_m}{dt} = \vec{f}\cdot\vec{v}$ = Puissance de la force de frottement

d

Notion de l'opérateur gradient.

exemples : méca : $\vec{F}_{cons} = -\vec{grad}(E_p)$

thermo : $\vec{J} = -\lambda\,\vec{grad}(T)$

électrostatique : $\vec{E} = -\vec{grad}(V)$

Le gradient permet la mesure de la variation d'une f° (physique), selon les 3 directions de l'espace.

$\vec{grad}(E_p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial E_p}{\partial x} \\ \frac{\partial E_p}{\partial y} \\ \frac{\partial E_p}{\partial z} \end{pmatrix}$

$f'(x) = \frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x}$ car 1 seul variable

$\begin{cases} d : \text{dérivée totale} \\ \partial : \text{dérivé partielle} \end{cases}$

physique
22/01

$\vec{P} = -mg\vec{u}_z$

$\vec{T} = kx\vec{u}_x$

Exemple : $f(x,y) = 2x^3y^2 - \frac{3x}{y}$

$$\vec{grad}(f) = \begin{pmatrix} 6x^2y^2 - \frac{3}{y} \\ 4x^3y + \frac{3x}{y^2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

differentielle de la fonction $f(x,y,z)$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}$$