

**EPITA**

# **Mathématiques**

**Contrôle (S3)**

**octobre 2018**

**Nom :**

**Prénom :**

**Entourer le nom de votre professeur de TD : Mme Boudin / M. Goron / M. Rodot**

**Classe :**

**NOTE :**

# Contrôle 1

Durée : trois heures

Documents et calculatrices non autorisés

## Exercice 1 (3 points)

1. Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  où  $u_n = n^2 \left( e^{1/n^2} - \cos\left(\frac{1}{n}\right) \right)$ .

2. Soit  $a \in \mathbb{R}^*$ . Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{1}{an} \right)^{2n}$ .

## Exercice 2 (5,5 points)

1. Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} ne^{1/n} - n$  puis en déduire la nature de la série  $\sum (ne^{1/n} - n)$ .

2. Soit  $a \in \mathbb{R}_+^*$ . Déterminer, via la règle de d'Alembert, la nature de la série  $\sum \frac{(n!)^a}{(2n)!}$  en fonction de  $a$ .

3. Soit  $a \in ]0, 1[$ . Déterminer, via la règle de Cauchy, la nature de la série  $\sum \frac{2^{\sqrt{n}}}{a^{n!}}$ .

4. Soit  $a \in \mathbb{R}_+^*$ . Déterminer la nature de  $\sum \frac{(-1)^n}{n^a}$  en justifiant votre réponse.

### Exercice 3 (6 points)

1. Soient  $N \in \mathbb{N}$ ,  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites strictement positives telles que pour tout  $n \geq N$ ,  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$ .

Montrer que  $\sum v_n$  converge  $\implies \sum u_n$  converge.

2. Soit  $(u_n)$  une suite réelle strictement positive telle que  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$  où  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

a. Soit  $(v_n) = \left(\frac{1}{n^\beta}\right)$  où  $\beta \in \mathbb{R}$ . Montrer que  $\frac{v_{n+1}}{v_n} = 1 - \frac{\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ .

b. On suppose que  $\alpha > 1$ . Montrer que  $\sum u_n$  converge.

N.B. : on pourra considérer  $\beta \in \mathbb{R}$  tel que  $1 < \beta < \alpha$  et utiliser la suite  $(v_n)$  introduite dans la question précédente.

c. On suppose  $\alpha < 1$ . Montrer que  $\sum u_n$  diverge.

N.B. : on pourra considérer  $\beta \in \mathbb{R}$  tel que  $\alpha < \beta < 1$  et utiliser la suite  $(v_n)$  introduite dans la question a.

[suite du cadre page suivante]

3. Étudier la nature de  $\sum u_n$  où  $u_n = \frac{2 \times 4 \times \dots \times 2n}{3 \times 5 \times \dots \times (2n+1)}$ .

4. Discuter suivant les valeurs de  $a \in \mathbb{R}_+$  de la nature de  $\sum u_n$  où  $u_n = \frac{n \times n!}{(a+1) \times \dots \times (a+n)}$ .

[suite du cadre page suivante]

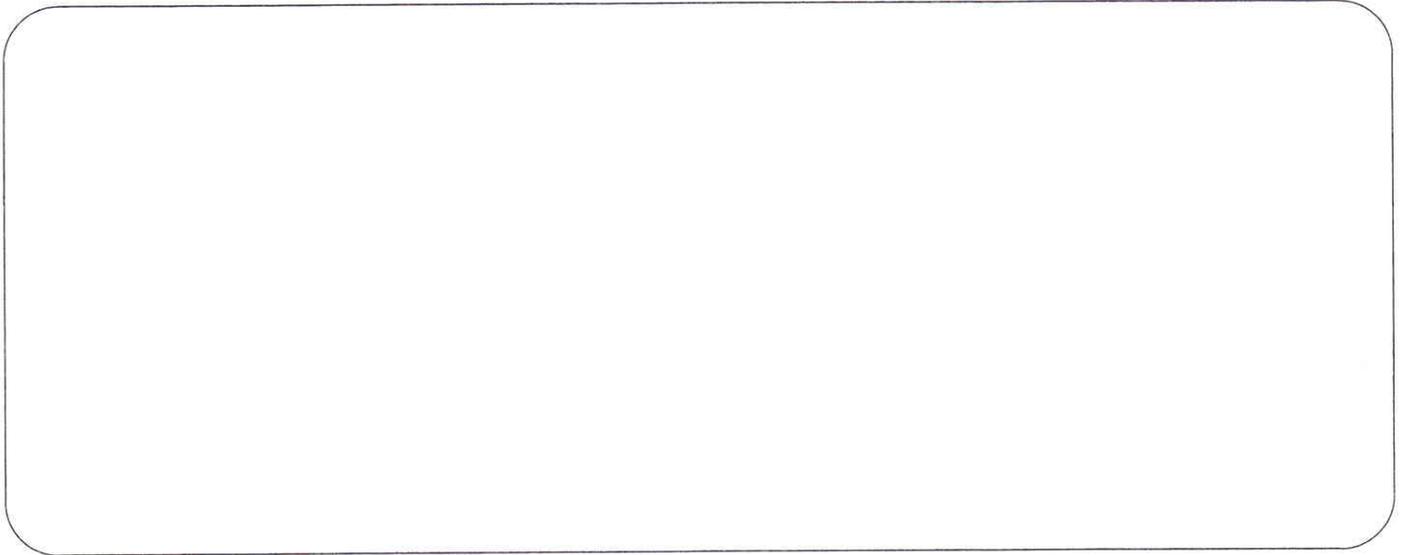
### Exercice 4 (3 points)

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ . On considère la suite  $(u_n)_{n \geq 2}$  définie pour tout  $n \geq 2$  par  $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha + (-1)^n}}$ .

1. Vérifier que  $u_n = \frac{(-1)^n}{n^{\alpha/2}} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)^{1/2}}$ .

2. En déduire  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $u_n = \frac{(-1)^n a}{n^{\alpha/2}} + \frac{b}{n^{3\alpha/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3\alpha/2}}\right)$ .

3. En déduire la nature de  $\sum u_n$  en fonction de  $\alpha$ .



**Exercice 5 (3 points)**

Déterminer la nature de la série  $\sum u_n$  où, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n = \sqrt[3]{n^3 + 2n} - \sqrt{n^2 + 3}$ .

