Algèbre linéaire I

(trois semaines)

(du lundi 15 octobre 2018 au vendredi 16 novembre 2018)

Exercice 1

Soient E un $\mathbb{R}$-ev, F et G deux sev de E.

1. Donner un exemple pour lequel $F \cup G$ n'est pas un sev de E.
2. Montrer que
$$(F \cup G \text{ sev de } E) \Longleftrightarrow (F \subset G \text{ ou } G \subset F)$$

Exercice 2

Soient E un $\mathbb{R}$-ev, F et G deux sev de E et $X = \{x_1, \dots, x_n\} \subset E$. Montrer que

1. $F + G = \mathrm{Vect}(F \cup G)$.
2. $\mathrm{Vect}(X) = \big\{\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n ; (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n\big\}$.

Exercice 3

Les familles suivantes sont-elles libres dans E ?

1. $\big(1, X-1, (X+1)^2\big) \qquad \big(E = \mathbb{R}_2[X]\big)$
2. $(x \mapsto e^{2x},\, x \mapsto x^2,\, x \mapsto x) \qquad \big(E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}\big)$
3. $(x \mapsto e^{x},\, x \mapsto e^{x+1},\, x \mapsto e^{x+2}) \qquad \big(E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}\big)$
4. $\big(x \mapsto \sin(x),\, x \mapsto \cos(x),\, x \mapsto x\big) \qquad \big(E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}\big)$

Exercice 4

Soient E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie et F un sev de E.

Via le théorème de la base incomplète, montrer que F admet un supplémentaire dans E.

Exercice 5

Soient E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie, F et G deux sev supplémentaires dans E, $\mathscr{B}$ une base de F et $\mathscr{B}'$ une base de G.

1. Montrer que la concaténation de $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ est une base de E.
2. En déduire que $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$.

Exercice 6

Soient E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie, F et G deux sev de E tels que $F \subset G$ et $\dim(F) = \dim(G)$.

Via les résultats des deux exercices précédents, montrer que $F = G$.

Exercice 7

Soient E, F deux $\mathbb{R}$-ev, $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et $X = (x_1, \ldots, x_n)$ est une famille de vecteurs de E.
Montrer que

1. $f\big(\mathrm{Vect}(X)\big) = \mathrm{Vect}\big(f(X)\big)$.
2. $\big[f$ surjective et $\mathrm{Vect}(X) = E\big] \Longrightarrow \mathrm{Vect}\big(f(X)\big) = F$.
3. $\big[f$ injective et X libre$\big] \Longrightarrow f(X)$ libre.
4. On suppose de plus E et F de dimension finie et f bijective. Montrer que $\dim(E) = \dim(F)$.

Exercice 8

Le but de cet exercice est de démontrer le théorème du rang.

Soient E et F deux $\mathbb{R}$-ev avec E de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

Soient G un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(f)$ dans E et $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \mathrm{Im}(f) \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \right.$.

Via le résultat de la dernière question de l'exercice précédent, montrer que $\dim(G) = \dim\big(\mathrm{Im}(f)\big)$ et en déduire le théorème du rang :

$$\dim(E) = \dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big) + \dim\big(\mathrm{Im}(f)\big)$$

Exercice 9

Soient E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie, F et G deux sev de E.

1. Montrer que $\dim(F \times G) = \dim(F) + \dim(G)$.
2. Via le théorème du rang et l'application $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} F \times G & \longrightarrow & F + G \\ (x, y) & \longmapsto & x + y \end{array} \right.$, montrer que

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$$

Exercice 10

Soit l'application $\Phi : \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ définie pour tout $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ par $\Phi(f) = F$
où pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = f(x) + f(-x)$.

1. Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
2. Déterminer $\mathrm{Ker}(\Phi)$. Φ est-elle injective ?
3. Montrer que l'image de Φ est égale à l'ensemble des fonctions paires.

Exercice 11

1. Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ par $f(x, y, z) = x - y + 2z$.

   Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ (en précisant une base) et $\mathrm{Im}(f)$.

2. Soit $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ par $g(x, y, z) = (x - y + 2z, 2x - z)$.

   Déterminer $\mathrm{Ker}(g)$ (en précisant une base) et $\mathrm{Im}(g)$.

Exercice 12

1. Soient E un $\mathbb{R}$-ev et $(f, g) \in \big(\mathscr{L}(E)\big)^2$.

   Montrer que $g \circ f = 0 \Longleftrightarrow \mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(g)$.

2. Soient E un $\mathbb{R}$-ev et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^2 + f - 2id = 0$ où id désigne l'identité.

   a. Montrer que $\mathrm{Im}(f - id) \subset \mathrm{Ker}(f + 2id)$ et $\mathrm{Im}(f + 2id) \subset \mathrm{Ker}(f - id)$.

   b. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(f - id) \oplus \mathrm{Ker}(f + 2id)$.

Exercice 13

Soient E un $\mathbb{R}$-ev, $s \in \mathscr{L}(E)$ tel que $s^2 = id$ et $p \in \mathscr{L}(E)$ tel que $p^2 = p$.

1. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$.
2. Montrer que $\mathrm{Im}(s + id) \subset \mathrm{Ker}(s - id)$ et que $\mathrm{Im}(s - id) \subset \mathrm{Ker}(s + id)$
3. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(s - id) \oplus \mathrm{Ker}(s + id)$

Exercice 14

Soient E un $\mathbb{R}$-ev, $(u, v) \in \mathscr{L}(E) \times \mathscr{L}(E)$ tels que $u \circ v = v \circ u$. Montrer que

$$E = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Ker}(v) \Longrightarrow \mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(v) \text{ et } \mathrm{Im}(v) \subset \mathrm{Ker}(u).$$

Exercice 15

Soient E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2) \Longleftrightarrow E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$$

Exercice 16

Soit $(A, B, C) \in \big(\mathscr{M}_n(\mathbb{R})\big)^3$.

1. Montrer que le produit matriciel est associatif c'est-à-dire $A(BC) = (AB)C$.
2. Montrer que ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$.
3. Montrer que $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

Exercice 17

Soient E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie et $(u,v) \in \big(\mathscr{L}(E)\big)^2$. On note id l'application identique de E dans E c'est-à-dire définie pour tout $x \in E$ par $id(x) = x$.

1. Via le théorème du rang, montrer que si u est injective, alors u est bijective. Montrer de même que si u est surjective, alors u est bijective.
2. Montrer que $u \circ v = id \Longrightarrow u$ surjective.
3. Montrer que $v \circ u = id \Longrightarrow u$ injective.
4. Soient $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$ et $(A,B) \in \mathscr{M}_n^2(\mathbb{R})$ tel que $AB = I_n$ où I_n est la matrice identité d'ordre n.

   En considérant les endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associés à A et B, montrer que A est inversible et $BA = I_n$.

Exercice 18

Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Déterminer (sous forme factorisée) les polynômes $\det(A - XI)$ et $\det(B - XI)$.

Exercice 19

Soit $(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$.

Déterminer le déterminant (sous forme factorisée) de $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_1 & a_1 & \dots & \dots & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_2 & \dots & \dots & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & \dots & a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & \dots & a_n \end{pmatrix}$.

Exercice 20

Soit $(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$. Déterminer sous forme factorisée $V(x_1, x_2, ..., x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$

Exercice 21

Soit $\Delta : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \longmapsto & (a+d)X^2 + (b+c)X + d - c \end{array} \right.$

Déterminer la matrice de Δ relativement aux bases canoniques de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 22

Soient $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et $f : \begin{cases} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ X \mapsto AX - XA \end{cases}$

1. Montrer que $f \in \mathscr{L}\big(\mathscr{M}_2(\mathbb{R})\big)$.
2. f est-elle bijective ?
3. Déterminer la matrice de f dans la base canonique $\mathscr{B} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 23

Soient $(x_0, ..., x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ fixé et V l'application de $\mathbb{R}_n[X]$ vers $\mathbb{R}^{n+1}$ définie pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$ par

$$V(P) = \big(P(x_0), \dots, P(x_n)\big)$$

Déterminer la matrice de V relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathbb{R}^{n+1}$.