Algèbre linéaire II

(trois semaines)

(du lundi 19 novembre 2018 au vendredi 7 décembre 2018)

Exercice 1

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

A est-elle diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$?

Si oui donner une base de vecteurs propres.

Mêmes questions avec $B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -3 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

Exercice 2

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} a & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix}$.

A est-elle diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$?

Si oui donner une base de vecteurs propres.

Mêmes questions avec $B = \begin{pmatrix} -1 & a+1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 3 & -a-1 & 2 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2-a & a-2 & a \end{pmatrix}$.

N.B. : la diagonalisation dans les cas favorables n'est pas demandée pour B et C.

Exercice 3

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & \beta & \beta \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

Étudier la diagonalisabilité de A et B dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

Il n'est pas demandé d'exhiber une base de vecteurs propres dans les cas favorables.

Exercice 4

Dans cet exercice, diagonalisable signifie diagonalisable dans $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$.

Soient a, b, c, d des nombres réels et $A_{(a,b,c,d)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -d \\ 1 & 0 & 0 & -c \\ 0 & 1 & 0 & -b \\ 0 & 0 & 1 & -a \end{pmatrix}$.

1. Montrer que le polynôme caractéristique de $A_{(a,b,c,d)}$ est
$$P_{A_{(a,b,c,d)}}(X) = \det(A_{(a,b,c,d)} - XI) = X^4 + aX^3 + bX^2 + cX + d$$
2. Donner une matrice $M \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ qui n'est pas diagonalisable.
3. Soit $C = A_{(0,-13,0,36)}$. Montrer que C est diagonalisable et la diagonaliser. On explicitera une base de vecteurs propres.
4. Étudier la diagonalisabilité de $A_{(0,0,0,d)}$ selon les valeurs de d.
5. On suppose $a \neq 0$. Étudier la diagonalisabilité de $A_{(a,0,0,0)}$ selon les valeurs de a.
6. On suppose que $a = c = 0$, $b \neq 0$ et $d \neq 0$.
   a. Montrer que si $b^2 - 4d < 0$ alors $A_{(0,b,0,d)}$ n'est pas diagonalisable.
   b. On suppose $b^2 - 4d > 0$.
      i. Montrer que si $d < 0$ alors $A_{(0,b,0,d)}$ n'est pas diagonalisable.
      ii. Donner une condition sur b et d pour que $A_{(0,b,0,d)}$ soit diagonalisable.
   c. Montrer que si $b^2 - 4d = 0$ alors $A_{(0,b,0,d)}$ n'est pas diagonalisable en déterminant $\dim(E_\lambda)$ pour une valeur propre λ non nulle quelconque.

Exercice 5

Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites réelles telles que $\begin{cases} x_n = x_{n-1} + z_{n-1} \\ y_n = y_{n-1} + z_{n-1} \\ z_n = 2z_{n-1} \end{cases}$ avec x_0, y_0 et z_0 fixés dans $\mathbb{R}$.

Déterminer x_n, y_n et z_n en fonction de n.

Exercice 6

Résoudre le système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = 3x(t) - 2y(t) - 4z(t) \\ y'(t) = -2x(t) + 3y(t) + 2z(t) \\ z'(t) = 3x(t) - 3y(t) - 4z(t) \end{cases}$$

Exercice 7

1. Montrer que tout polynôme de degré impair à coefficients réels admet au moins une racine réelle.
2. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + A + I = 0 \quad (*)$.

   a. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$. Montrer que $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$.

   b. Montrer qu'une matrice $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ ne peut pas vérifier l'équation $(*)$.

Exercice 8

Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \end{array} \right.$ avec $\left\{ \begin{array}{l} y_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ y_n = x_{n-1} \end{array} \right.$.

Montrer que $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(f) = \emptyset$.

Exercice 9

Soient E un $\mathbb{R}$-ev, $f \in \mathscr{L}(E)$ et $P(X) = a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0$ où $a_i \in \mathbb{R}$ pour tout $i \in \{0, ..., n\}$.

On note $P(f)$ l'endomorphisme de E défini par $P(f) = a_n f^n + \cdots + a_1 f + a_0\, id$ où $f^i = \underbrace{f \circ f \circ ... \circ f}_{i \text{ fois}}$.

On dit que P est un *polynôme annulateur* de f si $P(f) = 0$.

1. Montrer que $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(f),\ P(\lambda) \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}\big(P(f)\big)$.
2. En déduire que si P est un polynôme annulateur de f alors $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(f) \subset \big\{\lambda \in \mathbb{R},\ P(\lambda) = 0\big\}$.
3. Soit p un projecteur i.e. $p \in \mathscr{L}(E)$ et $p^2 = p$. Montrer que $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(p) \subset \{0, 1\}$.

Exercice 10

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer que $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} B\Big(a_{ii}, \sum_{j\neq i} |a_{ij}|\Big)$ où $B(a, r) = \big\{z \in \mathbb{C},\quad |z - a| \leqslant r\big\}$ avec $(a, r) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}^+$.
2. Montrer que $\Big(\forall i \in \{1, \cdots, n\},\quad |a_{ii}| > \displaystyle\sum_{j\neq i} |a_{ij}|\Big) \Longrightarrow A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 11

L'exercice suivant propose des applications du théorème de Cayley-Hamilton qui dit que pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $P_A(A) = 0$ c'est-à-dire que le polynôme caractéristique de A est un polynôme annulateur de A.

Soit $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ tel que $P_A(X) = -(X-1)^2(X-2)$ avec $\dim(E_1) = 1$.

La matrice A n'est donc pas diagonalisable et pourtant, nous allons pouvoir calculer aisément A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. A est-elle inversible ?
2. Via le théorème de Cayley-Hamilton, déterminer A^{-1} en fonction de A^2, A et I.
3. En effectuant la division euclidienne de X^n par P_A, déterminer A^n en fonction de n, A^2, A et I.