TD2 Algèbre Linéaire

Exercice n°1 : 1) H est un sev de E ssi $\mathbb{R}$-ev

$$\begin{cases} \cdot\ 0_E \in H \\ \cdot\ \forall (x,y) \in H^2,\ x+y \in H \\ \cdot\ \forall x \in H,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}\ \lambda x \in H \end{cases}$$

$F \cup G$ n'est pas stable par addition

$(1,0) \in F$ donc $(1,0) \in F \cup G$

$(0,1) \in G$ donc $(0,1) \in F \cup G$.

$(1,0) + (0,1) = (1,1) \notin F \cup G$.

2) $\boxed{\Leftarrow}$ (H) $F \subset G$ ou $G \subset F$

$\boxed{AD}$ $F \cup G$ sev de E

Si $F \subset G$, $F \cup G = G$ est un sev de E.

Si $G \subset F$, $F \cup G = F$ est un sev de E.

$\boxed{\Rightarrow}$

$A \Rightarrow (B \text{ ou } C)$: contraposé $(\neg B \text{ ou } \neg C) \Rightarrow \neg A$

$P \Rightarrow Q = \neg P \text{ ou } Q$

$A \Rightarrow (B \text{ ou } C) = A \Rightarrow (\neg B \Rightarrow C)$

$A \Rightarrow (B \text{ ou } C) = (\neg A \text{ ou } B) \text{ ou } C) = \neg(\neg A \text{ ou } B) \Rightarrow C = (A \text{ et } \neg B) \Rightarrow C$

On suppose : $F \cup G$ est un sev de E et $F \not\subset G$. (On veut montrer $G \subset F$)

$F \not\subset G \Leftrightarrow F \setminus G \neq \emptyset \Leftrightarrow \exists f \in F,\ f \notin G$

Soit $g \in G$, soit $f \in F$, tel que $f \notin G$

$f \in F$ donc $f \in F \cup G$ | via la stabilité par addition $f+g \in F \cup G$.

$g \in G$ donc $g \in F \cup G$ | Donc $f+g \in F$ ou $f+g \in G$

$F \cup G$ est un sev de E

Supposons $f+g \in G$

$f+g \in G$
$-g \in G$
G est stable par addition

$f+g-g = f \in G$ impossible.

Par l'absurde, $f+g \notin G$ donc $f+g \in F$.

On a donc

$f+g \in F$
$-f \in F$
F est stable par addition

$f+g-f = g \in F$.

CCL : $g \in G \to g \in F$ donc $G \subset F$.

Par double application, $F \cup G$ sev de $E \Leftrightarrow (F \subset G$ ou $G \subset F)$.

Exercice n°2 : Vect(X) est le plus petit espace vectoriel contenant X. En particulier, si un espace vectoriel contient X, il contient Vect(X).

1) $F+G = \text{Vect}(F \cup G)$

a) Mq $F+G \subset \text{Vect}(F \cup G)$

b) Mq $F+G$ est un sev de E qui contient $F \cup G$.

a) Soit $x \in F+G$

$\exists (f,g) \in F \times G,\ x = f+g$.

$f \in F$ et $F \subset F \cup G \subset \text{Vect}(F \cup G)$

donc $f \in \text{Vect}(F \cup G)$

$g \in G$ donc $g \in \text{Vect}(F \cup G$

$\text{Vect}(F \cup G)$ est stable par addition.

donc $f+g \in \text{Vect}(F \cup G)$, $x \in \text{Vect}(F \cup G)$ d'où $F+G \subset \text{Vect}(F \cup G)$.

b) $0_E = \underset{\in F}{0_E} + \underset{\in G}{0_E} \in F+G$.

Soient x_1 et x_2 deux éléments de $F+G$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$\exists (f_1, g_1) \in F \times G$, $x_1 = f_1 + g_1$

$\exists (f_2, g_2) \in F \times G$, $x_2 = f_2 + g_2$.

$\lambda x_1 + x_2 = \lambda(f_1 + g_1) + (f_2 + g_2) \in F+G$.

$F+G$ est donc un sev de E

Soit $y \in F \cup G$. Alors $y \in F$ ou $y \in G$

Si $y \in F$, $y = \underbrace{y}_{\in F} + \underbrace{0}_{\in G} \in F+G$.

Si $y \in G$, $y = \underbrace{0}_{\in F} + \underbrace{y}_{\in G} \in F+G$

D'où $F \cup G \subset F+G$.

$F+G$ est un sev de E qui contient $F \cup G$, il contient donc $Vect(F \cup G)$

Par double inclusion, $F+G = Vect(F \cup G)$.

2) On note $S = \{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \, / \, (\lambda_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n \}$.

a) Mq $S \subset Vect(X)$

b) Mq S est un ev et S contenant X.

a) Soit $y \in S$: //

$\forall i \in [\![1, n]\!]$

- $x_i \in X$ donc $x_i \in Vect(X)$
- $\lambda_i \in \mathbb{R}$
- $Vect(X)$ est stable par multiplication scalaire.

donc $\lambda_i x_i \in Vect(X)$ de plus $Vect(X)$ est stable par addition

donc //.

b) $0_E = 0_{\mathbb{R}} x_1 + 0 x_2 + \dots + 0 x_n = \sum_{i=1}^{n} 0 . x_i \in S$.

Soient $y_1 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ et $y_2 = \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i$ deux éléments de S et $k \in \mathbb{R}$.

Exercice n°3 : 1) On cherche $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$a.1 + b.(X-1) + c.(X+1)^2 = 0$

$\Leftrightarrow a + bX - b + cX^2 + 2cX + c = 0$

$\Leftrightarrow (a-b+c) + (b+2c)X + cX^2 = 0$.

on identifie des coef :

$$\begin{array}{l} 1 \\ X \\ X^2 \end{array} \begin{cases} a-b+c=0 \\ b+2c=0 \\ c=0 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=0. \Rightarrow \text{Famille libre.}$$

2) On cherche $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tq $\forall x \in \mathbb{R}$, $ae^{2x} + bx^2 + cx = 0$

En particulier si on evalue en $0, 1, -1$ on obtiens :

$$\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=-1 \end{array} \begin{cases} a=0 \\ ae^2 + b + c = 0 \\ ae^{-2} + b - c = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b+c=0 \\ b-c=0 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=0$$

Le sous-système n'a pas solution non nulle, a fortiori le système de départ non-plus.

3) On cherche $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tq $\forall x \in \mathbb{R}$, $ae^x + be^{x+1} + ce^{x+2} = 0$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}$, $e^x(a + be + ce^2) = 0$

$\Leftrightarrow a + be + ce^2 = 0$.

$\Leftrightarrow (a,b,c) \in \text{Vect}\{(e,-1,0),(e^2,0,-1)\}$. La famille est liée.

ex: $e(x \mapsto e^x) - 1.(x \mapsto e^{x+1}) + 0.(x \mapsto e^{x+2}) = 0$

Rq: $(x \mapsto e^{x+1}) = e.(x \mapsto e^x)$

La famille $(x \mapsto e^x, x \mapsto e^{x+1})$ est liée, toute sur-famille est encore liée.

4) On cherche $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tq

$\forall x \in \mathbb{R}$, $a\cos(x) + b\sin(x) + cx \in \mathbb{R}^3$ tq

En particulier, si on évalue en $0, \pi, \frac{\pi}{2}$:

$$\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pi \\ x=\frac{\pi}{2} \end{array} \begin{cases} a=0 \\ -a + c\pi = 0 \\ b + c\frac{\pi}{2} = 0 \end{cases}$$

$a=b=c=0$. La famille est libre.

Exercice n°4 : F sev de E

$\mathcal{F} : (f_1, f_2, \ldots, f_p)$ base de F c'est donc une famille libre ; On peut la compléter par une base (d'après le théorème de la base incomplète)

$$(\underbrace{f_1, \ldots, f_p}_{\mathcal{F}}, \underbrace{g_1, \ldots, g_n}_{\mathcal{G}}) \text{ de } E$$

$\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$

Montrons que $G = Vect(\mathcal{G})$ est un supplémentaire de F dans E, càd $F \oplus G = E$

càd $\begin{cases} E = F + G \\ F \cap G = \{0_E\} \end{cases}$.

- Mq $E = F + G$

→ $F + G \subset E$ par nature

→ Soit $x \in E$, x se décompose selon la base $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ de E :

$\exists (\lambda_i)_{1 \leq i \leq p} \in \mathbb{R}^p$, $\exists (\mu_k)_{1 \leq k \leq n} \in \mathbb{R}^n$

$$x = \underbrace{\sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_i}_{\in Vect(\mathcal{F}) = F} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \mu_k g_k}_{\in Vect(\mathcal{G}) = G}$$

Donc $x \in F + G$; $E \subset F + G$

Par double inclusion, $E = F + G$.

- Mq $F \cap G = \{0\}$. (Rq $0 \in F \cap G$)

Soit $y \in F \cap G$:

- $y \in F$: $\exists (\lambda_i)$, $y = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_i$
- $y \in G$: $\exists (\mu_k)$, $y = \sum_{k=1}^{n} \mu_k g_k$

$0 = y - y$.

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_i + \sum_{k=1}^{n} (-\mu_k) g_k}_{\text{Combinaison linéaire de } \mathcal{F} \cup \mathcal{G}}$$

Or $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ est une base de E, donc une famille libre ; ainsi :

$\begin{cases} \forall i \in [\![1, p]\!] \ \lambda_i = 0 \\ \forall k \in [\![1, n]\!] \ \mu_k = 0 \end{cases}$

Donc $y = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_i = 0$

CCL : $F \cap G = \{0\}$

De plus $F + G = E$ donc F et G sont supplémentaire dans E

Exercice n° 5 :

1) $E = F \oplus G$

$\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_i)$ base de F

$G = (g_1, \dots, g_i)$ base de G

Mq : $\mathcal{F} \cup G$ est une base de E $\Rightarrow$ $F \cup G$ engendre E.

$f \in F$ donc se decomposer en une combinaison linéaire des vecteurs $\mathcal{F}$

$f = \sum \lambda_i f_i$

$g \in G$ donc $g = \sum \mu_k g_k$

$x = f + g$

$= \underbrace{\sum \lambda_i f_i + \sum \mu_k g_k}_{\text{Combinaison linéaire de } \mathcal{F} \sqcup G}$ Donc $\mathrm{Vect}(\mathcal{F} \sqcup G) \supset E$

$\subset$: evidente.

$\Rightarrow$ $F \cup G$ est libre.

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_i + \sum_{k=1}^{n} \mu_k g_k = 0 \Longleftrightarrow \underbrace{\sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_i}_{\in \mathrm{Vect}(\mathcal{F}) = F} = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} (-\mu_k) g_k}_{\in \mathrm{Vect}(G) = G}.$$

donc $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i \in F \cap G = \{0\}$. d'où $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_i = 0$

$\sum \mu_k g_k = 0$. $\mathcal{F}$ et G étant des familles libres, on a donc $\begin{cases} \forall i\ \lambda_i = 0 \\ \forall k,\ \mu_k = 0. \end{cases}$

CCL : $\mathcal{F} \cup G$ est libre. De plus elle engendre E donc $\mathcal{F} \sqcup G$ est une base de E.

2) $\dim(E) = |\mathcal{F} \sqcup G| = |\mathcal{F}| + |G| = \dim(F) + \dim(G$

Exercice n° 6 :

$\begin{cases} F \subset G \\ \dim(F) = \dim(G) \end{cases} \Rightarrow F = G$

F est un sev de G : il admet un supplémentaire H dans G

$F \oplus H = G$ (ex 4) | donc $\dim H = 0$

donc $\dim F + \dim H = \dim G$ (ex 5) | d'où $H = \{0\}$

Or $\dim F = \dim G$ | $G = F + \{0\} = F$

Exercice n°7 : $X = \{x_1, \dots x_n\}$; $f(X) = \{f(x_1), \dots, f(x_n)\}$.

f injective $\Leftrightarrow \ker(f) = \{0_E\}$. $\quad f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$

f surjective $\Leftrightarrow \mathrm{Im}(f) = F$. $\quad f^{-1}(B) = \{x \in$

1) $f(\mathrm{Vect}(X)) = f\left(\left\{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i \mid (\lambda_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n\right\}\right) = \left\{f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \mid (\lambda_i) \in \mathbb{R}^n\right\}$.

$= \left\{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i) \mid (\lambda_i) \in \mathbb{R}^n\right\}$.

$= \mathrm{Vect}(\{f(x_1), \dots, f(x_n)\}) = \mathrm{Vect}(f(X))$.

2) f surjective $\Leftrightarrow \mathrm{Im}(f) = F$
X engendre $E \Leftrightarrow \mathrm{Vect}(X) = E$

$\mathrm{Vect}(f(X)) = f(\mathrm{Vect}(X)) \underset{\mathrm{Vect}(X)}{=} f(E) = \mathrm{Im}(f) \underset{f \text{ surjective}}{=} F$

3) f injective $\ker(f) = \{0\}$
X libre $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0 \Rightarrow \forall_i\ \lambda_i = 0$

$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i) = 0_F \underset{\text{linéarité}}{\Leftrightarrow} f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) = 0_F \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in \ker(f)$

$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0_E$ (car f injective, $\ker(f) = \{0\}$) $\Leftrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!],\ \lambda_i = 0$.

CCL : $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i) = 0 \Rightarrow \forall i \in [\![1, n]\!], \lambda_i = 0$

Donc la famille $\{f(x_1), \dots, f(x_n)\} = f(X)$ est libre.

4) $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E.
f est bijective donc surjective, $\mathcal{E}$ est une base de E donc $\mathrm{Vect}(\mathcal{E}) = E$. (quest 2)
D'après Q2, $\mathrm{Vect}(f(\mathcal{E})) = F$, $f(\mathcal{E}) = (f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une famille génératrice de F.

f est bijective donc injectif + $\mathcal{E}$ est une base de E, donc une famille libre.
↳ D'après Q3, $f(\mathcal{E})$ est libre.
CCL: $f(\mathcal{E})$ est une famille libre et génératrice de F, c'est donc une base de F.
D'où $\dim(F) = \text{Card}(\{f(e_1), \dots f(e_n)\}) = n = \dim(E)$.

Exercice n°8

Théorème du rang $\begin{cases} f \in \mathcal{L}(E,F) \\ F \text{ est de dim finie.} \end{cases}$

Alors: ~~(Im(f) est de dimension finie et)~~

$\dim(E) = \dim(\ker(f)) + \underbrace{\dim(\text{Im}(f))}_{rg(f)}$

- $E = \ker f \oplus G$ $\quad \varphi : \begin{cases} G \to \text{Im}(f) \\ x \mapsto f(x). \end{cases}$ Mq φ bijective.

- Injectivité: (Rq: $0_E \in \ker(\varphi)$)

Soit $x \in \ker(\varphi)$.

$\ker(\varphi)$ est un sev de G donc $\in G$. D'autre part

$x \in \ker(\varphi) \Rightarrow \varphi(x) = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow x \in \ker(f)$.

Donc $x \in \ker(f) \cap G$. Or $E = \ker(f) \oplus G$ donc $\ker(f) \cap G = \{0_E\}$.

Ainsi $x = 0_E$ càd: $\ker(\varphi) = \{0_E\}$. La fonction φ est injective.

- Surjectivité:

Soit $y \in \text{Im}(f)$, $\exists x \in E$, $f(x) = y$. $E = \ker(f) \oplus G$ donc

$\exists u \in \ker(f)$, $\exists v \in G$, $x = u + v$

$y = f(x) = f(u+v) = f(u) + f(v)$

Donc $y = f(v)$, car $u \in \ker f$ $\quad v \in G$ donc $\varphi(v) = f(v)$. Ainsi $y = \varphi(v)$

Tout élément y de $\text{Im}(f)$ a un antécédent par φ. φ est surjective.

CCL: φ est bijective, d'après exo 7 $\dim(G) = \dim(\text{Im}(f))$

exo 5: $E = \ker(f) \oplus G$ donc

$\dim E = \dim \ker f + \dim G = \dim(\ker(f)) + \dim(\text{Im}(f))$

Exercice n°9 : Identité de Grassman : $\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$

$F \times G = \{(f,g) \mid f \in F, g \in G\}$ Soit $(f_1, \dots, f_n)$ est une base de F ($\dim F = n$). Soit $(g_1, \dots, g_p)$ une base de G ($\dim G = p$).

Alors $\begin{pmatrix} (f_1, 0)\ (f_2, 0), \dots, (f_n, 0) \\ (0, g_1), \dots (0, g_p) \end{pmatrix}$ est une base de $F \times G$.

Génératrice : $\forall x \in F \times G, \exists! f \in F, \exists! g \in G$

$x = (f,g) = (f,0) + (0,g)$

$(f,0) \in \mathrm{Vect}\{(f_i, 0) / 1 \leq i \leq n\}$.

$(0,g) \in \mathrm{Vect}\{(0, g_k) / 1 \leq k \leq p\}$.

Ces décompositions étant de plus uniques, la décomposition de $x = (f,g)$ comme combinaison linéaire des $\{(f_i, 0), (0, g_k) / \dots\}$ est unique, c'est donc une base

CCL : $\dim(F \times G) = \mathrm{Card}(\text{base}) = n + p = \dim(F) + \dim(G)$.

2) $\varphi : \begin{vmatrix} F \times G \longrightarrow F+G \\ (x,y) \longmapsto x+y \end{vmatrix}$. φ est surjective (par la définition de l'espace somme $F+G$);

En appliquant le théorème du rang à φ : dim Im

$\dim(\mathrm{Im}\,\varphi) = \dim(F \times G) - \dim(\ker(\varphi))$ càd

$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(\ker(\varphi))$.

Il faut montrer :

$\dim(\ker(\varphi)) = \dim(F \cap G)$.

$(x,y) \in \ker(\varphi) \iff \varphi(x,y) = 0 \iff x + y = 0 \iff x = -y$

si $(x,y) \in \ker(\varphi)$, alors (x,y) s'écrit $(x, -x)$ avec $\underset{\in G}{x}$ $\underset{\in F}{}$.

$x \in F \cap G$.

Réciproquement, si $x \in F \cap G$, $(x, -x) \in F \times G$ et $(x, -x) \in \ker(\varphi)$

Donc, $\ker(\varphi) = \{(x, -x) \mid x \in F \cap G\}$

$$\psi : \begin{cases} F \cap G \longrightarrow \ker(\varphi) \\ x \longmapsto (x, -x) \end{cases}$$

surjectif d'après ce qui précède,

injectif car $\psi(x) = (0, 0) \Rightarrow x = 0$.

Donc d'après ex 7 : $\dim(\ker(\varphi)) = \dim(F \cap G)$.

en réinjectant l'identité obtenue avec le thm du rang

$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$

Exercice n°10 :

$\Phi : \mathbb{R}^\mathbb{R} \to \mathbb{R}^\mathbb{R}$ $\quad \Phi(f) = x \mapsto f(x) + f(-x)$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $[\Phi(f)](x) = f(x) + f(-x)$.

1) Montrons que Φ est linéaire

Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\Phi(\lambda f + g)(x) = (\lambda f + g)(x) + (\lambda f + g)(-x)$

$= \lambda f(x) + g(x) + \lambda f(-x) + g(-x)$.

$= \lambda [f(x) + f(-x)] + [g(x) + g(-x)]$

$= \lambda [\Phi(f)](x) + [\Phi(g)](x)$

$= [\lambda \Phi(f) + \Phi(g)](x)$

Donc $\Phi(\lambda f + g) = \lambda \Phi(f) + \Phi(g)$.

Φ est une application linéaire de $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ c'est donc un endomorphisme de $\mathbb{R}^\mathbb{R}$

2) $f \in \ker(\Phi) \Leftrightarrow \Phi(f) = 0_{\mathbb{R}^\mathbb{R}}$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}$, $\Phi(f)(x) = 0_\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) + f(-x) = 0$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = f(x)$

$\Leftrightarrow f$ est une fonction impaire de $\mathbb{R}^\mathbb{R}$.

$f°$ impaire : $f(-x) = -f(x)$ $\quad$ $f°$ paire : $f(-x) = f(x)$

$\ker(\Phi) \neq \{0_{\mathbb{R}^\mathbb{R}}\}$ donc Φ n'est pas injective

3) Par double inclusion :

• Mq si $f \in Im(\Phi)$ alors f est paire

Soit $f \in Im(\Phi)$. $\exists g, f = \Phi(g)$.

Soit $x \in \mathbb{R}$

$f(-x) = \Phi(g)(-x) = g(-x) + g(-(-x)) = g(-x) + g(x)$.

$= \Phi(g)(x) = f(x)$.

$\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x)$ donc f est paire.

• Mq que toute fonction paire a un antécédent par Φ.

Soit h une fonction paire ; on cherche (s'il existe) une f° k telle que $\Phi(k) = h$.

Rq : $k \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \ker\Phi \oplus G = u + v$ $u \in \ker\Phi$ et $v \in G$.

$\Phi(k) = \Phi(v) + \Phi(u) = \Phi(v)$.

Il suffit de chercher un antécédent dans un supplémentaire de $\ker\Phi$

Ici un supplémentaire de $\ker\Phi$ est l'ensemble des fonctions paires

$\forall x \in \mathbb{R}, \Phi(h)(x) = h(x) + h(-x) = 2h(x)$ car h paire.

Donc $\Phi(h) = 2h$; $\Phi(\frac{1}{2}h) = h$ –

h admet bien un antécédent pour Φ, donc $h \in Im\,\Phi$.

CCL : $Im(\Phi)$ est l'ensembles des f° paires de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

• Mq toute f° paires a un antécédent par Φ.

Soit h une f° paire on cherche s'il existe une f° tq $\Phi(k) = h$).

Exercice n°11 :

$f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \\ (x,y,z) \mapsto x - y + 2z \end{cases}$ $\Leftrightarrow f(x,y,z) = 0$ $\Leftrightarrow x - y + 2z = 0$

$(x,y,z) \in \ker(f)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = x \\ y = x + 2z \\ z = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\ker(f) = Vect\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

Remarque : si on fixe x et y :
$x = x$; $y = y$; $z = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y$
$\ker(f) = \mathrm{Vect}\{\underbrace{(1, 0, -\tfrac{1}{2}), (0, 1, \tfrac{1}{2})}_{\text{Famille libre}}\}$.

(et génératrice de son Vect)
Donc c'est une base

$\dim \ker(f) = 2$
Théorème du rang :
$\dim \mathrm{Im}(f) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\ker(f)) = 3 - 2 = 1$.
$\mathrm{Im}(f)$ est un sev de $\mathbb{R}$ et $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 1 = \dim(\mathbb{R})$
donc par inclusion et égalité des dimensions (ex 6)
$\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$

Autre solution : $\mathrm{Im}(f) \subset \mathbb{R}$ Soit $a \in \mathbb{R}$
$a = f(a, 0, 0)$ donc $a \in \mathrm{Im}(f)$.
Par double inclusion, $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$

2) $g(x, y, z) = (x - y + 2z, 2x - z)$
$(x, y, z) = \ker(g) \iff \begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 2x - z = 0 \end{cases}$
$\begin{cases} x = x \\ y = x + 2z = 5x \\ z = 2x \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\ker(g) = \mathrm{Vect}\{(1, 5, 2)\}$.
CCL : $\dim(\ker(g)) = 1$. [$\{(1, 5, 2)\}$ est une base]
D'après le théorème du rang
$\dim \mathrm{Im}(g) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\ker(g)) = 3 - 1 = 2$.
$\mathrm{Im}(g)$ est un sev de $\mathbb{R}^2$ et $\dim \mathrm{Im}(g) = \dim \mathbb{R}^2 = 2$.
d'où $\mathrm{Im}(g) = \mathbb{R}^2$

Exercice n°12 : ($\Rightarrow$) On suppose $g \circ f = 0$

Soit $y \in Im(f)$: $\exists x \in E$ tq $y = f(x)$

$g(y) = g(f(x)) = \underbrace{g \circ f}_{0_{\mathcal{L}(E)}}(x) = 0$ Donc $y \in \ker(g)$ d'où $Im(f) \subset \ker(g)$

($\Leftarrow$) On suppose $Im(f) \subset \ker(g)$

Soit $x \in E$

$f(x) \in Im(f)$ donc $f(x) \in \ker(g)$ d'où $g(f(x)) = 0 \Leftrightarrow g \circ f(x) = 0$

ccl : $g \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

2) $f^2 = f \circ f$

$f \circ f + f - 2id = 0_{\mathcal{L}(E)}$ $\quad \forall x \in E \; f(f(x)) + f(x) - 2x = 0$.

Soit $y \in Im(f - id)$

$\exists x \in E, y = (f - id)(x) = f(x) - x$

linéarité f $(f + 2id)(y) = f(y) + 2y = f[f(x) - x] + 2[f(x) - x]$.

$= f \circ f(x) - f(x) + 2f(x) - 2x$

$= f \circ f(x) + f(x) - 2x \xrightarrow[\text{énoncé}]{} = 0$

Donc $y \in \ker(f + 2id)$ d'où $Im(f - id) \subset \ker(f + 2id)$

Autre méthode : $(f + 2id) \circ (f - id) = f \circ (f - id) + 2id \circ (f - id)$

linéarité $= f \circ f - \underbrace{f \circ id}_{f} + \underbrace{2id \circ f}_{f} - \underbrace{2id \circ id}_{id} = f \circ f + f - 2id = 0$.

D'après Q1, $Im(f - id) \subset \ker(f + 2id)$

Polynome d'endomorphisme :

$u \in \mathcal{L}(E)$ $\quad P = \sum_{k=0}^{n} p_k X^k$

$P(u)$ est l'endomorphisme défini par. $P(u) = \sum_{k=0}^{n} p_k u^k$

où $u^k = \underbrace{u \circ u \circ u \circ \cdots \circ u}_{k \text{ fois}}$ et $u^0 = id_E$.

Propriété :

$P(u) \circ Q(u) = (PQ)(u)$

En particulier

$Q(u) \circ P(u) = (QP)(u)$ $(QP = PQ)$

Donc $Q(u) \circ P(u) = P(u) \circ Q(u)$

deux polynomes d'un même endomorphismes commutent.

$f - id = (X-1)(f)$

$f + 2id = (X+2)(f)$

$(f - id) \circ (f + 2id) = (f + 2id) \circ (f - id) = [(X-1)(X+2)](f) = (X^2 + X - 2)(f)$

$= f \circ f + f - 2id = 0$

2) b) * Mq $\ker(f - id) \cap \ker(f + 2id) = \{0\}$.

$\rightarrow$ $0 \in \ker(f - id) \cap \ker(f + 2id)$

$\rightarrow$ soit x $\ker(f - id) \cap \ker(f + 2id$

$x \in \ker(f - id)$ donc $(f - id)(x) = 0 \iff f(x) - x = 0 \Rightarrow f(x) = x$.

$x \in \ker(f + 2id) \iff f(x) + 2x = 0 \iff f(x) = 2x$

Donc $x = -2x$ càd $x = 0$

Par double inclusion $\ker(f - id) \cap \ker(f + 2id) = \{0\}$.

* Mq $E = \ker(f - id) + \ker(f + 2id)$

$\ker + \ker \subset E$ (sev de E)

Soit $x \in E$.

$(f - id)(x) - (f + 2id)(x) = f(x) - x - f(x) - 2x = -3x$.

Donc

$x = (f - id)\left(\frac{-1}{3}x\right) + (f + 2id)\left(\frac{1}{3}x\right)$

Q2 $\in Im(f - id)$ $\in Im(f + 2id)$

$\in \ker(f + 2id)$ $\in \ker(f - id)$

Ainsi Par double inclusion

$E = \ker(f - id) + \ker(f + 2id)$

D'où

$E = \ker(f - id) \oplus \ker(f + 2id)$

Scanné par Hyperion - annales.hyperion.tf

Exercice n°13 : $p \circ p = p$: projecteur

$s \circ s = id$: symetrie

1) * Montrer que $\ker(p) \cap \mathrm{Im}(p) = \{0\}$.

- $0 \in \ker(p) \cap \mathrm{Im}(p)$
- Soit $x \in \ker(p) \cap \mathrm{Im}(p)$

$x \in \ker(p)$: $p(x) = 0$

$x \in \mathrm{Im}(p)$: $\exists y \in E, p(y) = x$

$0 = p(x) = p(p(y)) = \underbrace{p \circ p}_{p}(y) = p(y) = x$.

Donc $x = 0$

CCL : $\ker(p) \cap \mathrm{Im}(p) = \{0\}$

* Montrer que $E = \ker(p) + \mathrm{Im}(p)$

- $\ker(p) + \mathrm{Im}(p)$ est un sev de E, donc $\ker(p) + \mathrm{Im}(p) \subset E$.
- Soit $x \in E$.

$p(x - p(x)) = p(x) - p(p(x)) = p(x) - \underbrace{p \circ p}_{p}(x) = p(x) - p(x) = 0$

Donc $x - p(x) \in \ker(p)$

$x = \underbrace{x - p(x)}_{\in \ker p} + \underbrace{p(x)}_{\in \mathrm{Im}\, p}$

D'où $E \subset \ker(p) + \mathrm{Im}(p)$. Par double inclusion,

$E = \ker(p) + \mathrm{Im}(p)$

CCL : $E = \ker(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$

2) On utilise exercice n°12 q1 :

$(s + id) \circ (s - id) = s \circ (s - id) + id \circ (s - id)$

$\downarrow$ linéarité

$= \underbrace{s \circ s}_{id} - \underbrace{s \circ id}_{s} + \underbrace{id \circ s}_{s} - \underbrace{id \circ id}_{id} = 0_{\mathcal{L}(E)}$

D'où $\mathrm{Im}(s - id) \subset \ker(s + id)$

De manière analogue $\mathrm{Im}(s + id) \subset \ker(s - id)$

3) Mq $\ker(s-id) \cap \ker(s+id) = \{0\}$

- $0 \in \ker(s-id) \cap \ker(s+id)$
- Soit $x \in \ker(s-id) \cap \ker(s+id)$

$$x \in \ker(s-id) \Leftrightarrow (s-id)(x) = 0$$
$$\Leftrightarrow s(x) - x = 0$$
$$\Leftrightarrow s(x) = x$$
$$x \in \ker(s+id) \Leftrightarrow (s+id)(x) = 0$$
$$\Leftrightarrow s(x) + x = 0$$
$$\Leftrightarrow s(x) = -x$$

Donc $x = -x$ d'où $x = 0$.

CCL : $\ker(s-id) \cap \ker(s+id) = \{0\}$.

Mq $E = \ker(s-id) + \ker(s+id)$

- $\ker(s-id) + \ker(s+id)$ est un sev de E d'où $\ker(s-id) + \ker(s+id) \subset E$.
- Soit $x \in E$

$(s+id)(x) + (s-id)(-x)$

$= s(x) + x + s(-x) + x = 2x$

$x = \underbrace{\underbrace{(s+id)(\tfrac{1}{2}x)}_{\in Im(s+id)}}_{\in \ker(s-id)} + \underbrace{\underbrace{(s-id)(-\tfrac{1}{2}x)}_{\in Im(s-id)}}_{\in \ker(s+id)}$

Donc $E \subset \ker(s-id) + \ker(s+id)$

D'où $E = \ker(s-id) \oplus \ker(s+id)$

Exercice n°14 : $\begin{cases} u \circ v = v \circ u \\ E = \ker(u) \oplus \ker(v) \end{cases}$ Montrer que $u \circ v = 0_{\mathcal{L}(E)}$

Soit $x \in E$

Alors : $\exists!\, (y,z) \in \ker(u) \times \ker(v)$

$x = y + z \quad \begin{cases} u(y) = 0 \\ v(z) = 0 \end{cases}$

(Rq : L'unicité est inutile)

$v\circ v(x) = v\circ v(y+z)$

$v\circ v(x) = v\circ v(y) + v\circ v(z)$

$v\circ v(x) = v\circ v(y) + v\circ v(z)$

$v\circ v(x) = v(\underbrace{u(y)}_{0}) + u(v(z))$

$v\circ v(x) = 0$

$u\circ v = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $v\circ u = 0_{\mathcal{L}(E)}$

D'après ex 12 q 1,

$\mathrm{Im}(v) \subset \mathrm{Ker}(u)$

$\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(v)$

Utile Contrôle TD

Exercice n°15 :

($\Leftarrow$) On suppose $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$

- on a toujours : $\mathrm{Im}(f\circ f) \subset \mathrm{Im}(f)$
- Montrons que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Im}(f^2)$

Soit $x \in \mathrm{Im}(f)$

$\exists y \in E,\ x = f(y)$ $\quad y \in E : \exists!(a,b) \in \mathrm{Ker}(f)\times\mathrm{Im}(f)\ y = a+b.$

$x = f(y) = f(a+b)$

$x = f(a) + f(b)$ linéarité.

$a \in \mathrm{Ker}(f) : f(a) = 0$

$b \in \mathrm{Im}(f) : \exists z \in E,\ b = f(z)$

$x = 0 + f(f(z))$

$x = f\circ f(z)$

Donc $x \in \mathrm{Im}(f\circ f)$

On a donc $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Im}(f\circ f)$ d'où par double inclusion, $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f\circ f)$

($\Rightarrow$) On suppose : $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f\circ f)$

- Montrons que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f\circ f)$.

On applique le théorème du rang à f puis à $f\circ f$.

$\dim(E) = \dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(\mathrm{Ker}(f))$

$\updownarrow =$ $\qquad\qquad \updownarrow =$

$\dim(E) = \dim(\mathrm{Im}(f\circ f)) + \dim(\mathrm{Ker}(f\circ f))$.

D'où $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = \dim(\mathrm{Ker}(f\circ f))$

De plus, $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f\circ f)$.

Par inclusion et égalité des dimensions (ex6)

$\ker(f) = \ker(f \circ f)$

* Mq : $\ker(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$.
  - $0 \in \ker(f) \cap \mathrm{Im}(f)$
  - Soit $x \in \ker(f) \cap \mathrm{Im}(f)$

$x \in \ker(f) : f(x) = 0$

$x \in \mathrm{Im}(f) : \exists y \in E \ x = f(y)$

Donc $f(x) = f(f(y)) = 0$

$y \in \ker(f \circ f)$.

Or $\ker(f) = \ker(f \circ f)$ donc $y \in \ker(f) : f(y) = 0$.

Donc $x = f(y) = 0$

CCL : $\ker(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$.

* Mq $E = \ker(f) + \mathrm{Im}(f)$

On utilise la formule de Grassman (ex 9).

$$\dim(\ker(f) + \mathrm{Im}(f)) = \underbrace{\dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f))}_{\dim(E)} - \dim(\underbrace{\ker f \cap \mathrm{Im} f}_{\{0\}})$$

0

Donc $\dim(\ker(f) + \mathrm{Im}(f)) = \dim E$ Thm du rang

or $\ker(f) + \mathrm{Im}(f)$ est un sev de E par inclusion et égalité des dim. (ex 6)

$E = \ker(f) + \mathrm{Im}(f)$

CCL : $E = \ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

Exercice n° 16 :

Notation : dans cet exercice, on note $[M]_{i,j}$ le coefficient (i,j) de la matrice M.

Rappel :

$$[MN]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} [M]_{ik} [N]_{kj}$$

1) $$[A(BC)]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} [A]_{ik} [BC]_{kj} = \sum_{k=1}^{n} [A]_{ik} \left(\sum_{p=1}^{n} [B]_{kp} [C]_{pj} \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{p=1}^{n} [A]_{ik} [B]_{kp} [C]_{pj}$$

On peut permuter les sommes : elles sont finies et indépendantes.

$$= \sum_{p=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} ([A]_{ik} [B]_{kl} \underbrace{[C]_{ij}}_{\text{ne dépend pas de } k}).$$

$$= \sum_{l=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} [A]_{ik} [B]_{kl} \right) [C]_{lj} = \sum_{l=1}^{n} [AB]_{il} [C]_{lj} = [(AB)C]_{ij}$$

Donc $(AB)C = A(BC)$.

2) ${}^tA$ ou A^T : Transposée de A symetrique par rapport à la diagonale :

$${}^t\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c & e \\ b & d & f \end{pmatrix} \quad [{}^tA]_{ij} = [A]_{ji}$$

$${}^t({}^tA) = A$$

$\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2$

$$[{}^tB\,{}^tA]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} [{}^tB]_{ik} [{}^tA]_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{[B]_{ki} [A]_{jk}}_{\text{ce sont des reels : ils commutent}}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} [A]_{jk} [B]_{ki} = [AB]_{ji} = [{}^tAB]_{ij}.$$

3) Trace de M ($tr(M)$) (matrice carrée)

$$tr(M) = \sum_{i=1}^{n} [M]_{ii}$$

$$tr(AB) = \sum_{i=1}^{n} [AB]_{ii} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n}}_{\text{sommes finies independantes}} [A]_{ik} [B]_{ki}$$

or on peut permuter.

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \underbrace{[A]_{ik} [B]_{ki}}_{\text{reels : ils commutent}} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} [B]_{ki} [A]_{ik} = \sum_{k=1}^{n} [BA]_{kk} = tr(BA)$$

$$tr(ABC) = tr(BCA) = tr(CAB)$$

$$\neq$$

$$tr(ACB) = tr(BCA) = tr(BAC)$$

Exercice n°21 : $u : E \to F$

$\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ base de E

$\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_p)$ base de F

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u) = \begin{array}{c|c} & u(e_1) \ u(e_2) \cdots u(e_n) \\ \begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_p \end{array} & \begin{pmatrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \end{array}$$

Base canonique : $e_{11} \quad e_{12} \quad e_{21} \quad e_{22}$ $\quad u(e_j) = \sum_{i=1}^{p} m_{ij} f_i$

- de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$: $\left(\begin{pmatrix} 1&0\\0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&1\\0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0\\1&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0\\0&1 \end{pmatrix} \right) \mathcal{E}$

- $\mathbb{R}_2[X]$: $(1, X, X^2)\ \mathcal{F}$

$\Delta(e_{11}) = X^2 \qquad \Delta(e_{21}) = X - 1$

$\Delta(e_{12}) = X \qquad \Delta(e_{22}) = X^2 + 1$

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(\Delta) = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} e_{11} & e_{12} & e_{21} & e_{22} \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ X \\ X^2 \end{array} \end{array}$$

Exercice n°22 : 1) Soient X et Y deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$f(\lambda X + Y) = A(\lambda X + Y) - (\lambda X + Y)A = A.\lambda X + A.Y - \lambda X.A - YA$.

$= \lambda(AX - XA) + (AY - YA) = \lambda f(X) + f(Y)$

Donc f est linéaire : c'est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

... Il nous manque une info qui était présente dans un des exos qui a été sauté. Donc, retour sur un précédent exercice sauté.

Exercice n°17 : Question 1) : $u \in \mathcal{L}(E)$ E de dimension finie,

u injectif $\Leftrightarrow \mathrm{Ker}(u) = \{0_E\}$.

$\Leftrightarrow \dim(\mathrm{Ker}(u)) = 0$

$\updownarrow$ Théorème du rang (dim finie)

$\Leftrightarrow \dim(\mathrm{Im}(u)) = \dim(E)$

$\Leftrightarrow \mathrm{Im}(u) = E$ $\quad$ $\mathrm{Im}(u)$ sev de E

$\Leftrightarrow u$ est surjective.

---

2) $f(I_2) = 0$ donc $I_2 \in \mathrm{Ker}(f)$

$\mathrm{Ker}(f) \neq \{0\}$ donc f n'est pas injective, donc pas bijective.

3) $f(e_{11}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ c & 0 \end{pmatrix}$

$f(e_{12}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c & a-d \\ 0 & c \end{pmatrix}$

$f(e_{21}) = \begin{pmatrix} b & 0 \\ d-a & -b \end{pmatrix}$ $\qquad f(e_{22}) = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -c & 0 \end{pmatrix}$

$Mat_{\varepsilon}(f) = \begin{pmatrix} 0 & -c & b & 0 \\ -b & a-d & 0 & b \\ c & 0 & d-a & -c \\ 0 & c & -b & 0 \end{pmatrix}$

Les quatres colonnes ne sont pas linéairement indépendantes donc cette matrices libres n'est pas inversibles : la fonction n'est pas bijective.

Exercice n°23 :

Matrice de Vandermonde

$V(P) = (P(x_0), P(x_1), \dots, P(x_n))$

$V(1) = (1, 1, \dots, 1)$

$V(X) = (x_0, x_1, \dots, x_n)$

$V(X^2) = (x_0^2, x_1^2, \dots, x_n^2)$

$$\begin{array}{c|ccccc} & V(1) & V(X) & V(X^2) & \dots & V(X^n) \\ \hline (1,0,0,\dots,0) & 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ (0,1,0,\dots,0) & 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ (0,0,0,\dots,1) & 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{array}$$

$= (x_{i-1}^{\,j-1})_{1 \leq i,j \leq n+1}$

Déterminant d'une matrice carrée

Matrice M de taille n : $M = (m_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$

M_{ij} : matrice de taille $n-1$ extraite de M en enlevant la ligne i et la colonne j.

Formule de développement selon :

→ la colonne j : j fixé

$\det(M) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} m_{ij} \det(M_{ij})$

→ la ligne i : i fixé

$\det(M) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} m_{ij} \det(M_{ij})$

Complexité : Cette formule calcul un déterminant de taille n en l'exprimant comme une somme de $n!$ produit de n termes → $O(n.n!)$ opérations.

Swap de variables sans mémoire:
$a : x \quad b : y$
$a \leftarrow a+b \quad a : x+y$
$b \leftarrow a-b \quad b : x$
$a \leftarrow a-b \quad a : y$

Opérations sur les lignes et sur les colonnes.

* si on multiplie une colonne / ligne par une constante, on multiplie le déterminant par la même constante

* si on échange deux colonnes / lignes, on multiplie le déterminant par -1.

* Quand on ajoute à une colonne / ligne une combinaison linéaire des autres, on ne change pas le déterminant.

* $\det(I_n) = 1$

On se sert de ces modifications pour trouver une matrice de même déterminant contenant une ligne (colonne où tous les coefficients sauf un sont nuls. (Ex: Pivot de Gauss: $O(n^3)$ opérations)

Propriété:

→ Si la matrice est triangulaire, son déterminant est le produit des coeficients diagonaux.

→ $\det(M) = \det({}^tM)$

→ $\det(\lambda M) = \lambda^n \det(M)$

→ $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$

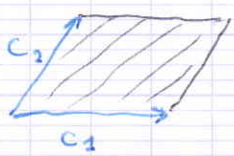
→ Une matrice A est inversible ssi $\det(A) \neq 0$. Alors : $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

Interpretation Géometrique:

En dim 1

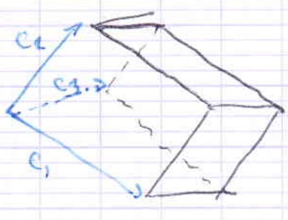
$\det = \pm$ longueur

En dim 2 :



$\det(c_1\ c_2) = \pm$ aire du parallelogramme

En dim 3 :



$\det(c_1\ c_2\ c_3) = \pm$ volume du parallepipède

QCM Maths 19/11 :

16) bc 17) b 18) $\ker(f) \subset \ker(f \circ g) \rightarrow e$ 19) abcd 20) ac

$\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}(g)$

11) a 12) e 13) ~~b~~ 14) c 15)

Exos TD :

4 -> 9

11 -> 15

18

dimension 1 : $\det(a) = a$

dimension 2 : $\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ → développement selon C_1. $j = 1$ fixé

$i=1 \quad (-1)^{1+1} ad$

$i=2 \quad + (-1)^{2+1} cb$ $= ad - bc$

dimension 3 : $\det\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \xrightarrow[C_3]{\text{Dev selon}}$ $i=1 \quad (-1)^{1+3} c \begin{pmatrix} d & e \\ g & h \end{pmatrix}$

$i=2 \quad + (-1)^{2+3} f \begin{pmatrix} a & b \\ g & h \end{pmatrix}$

$i=3 \quad + (-1)^{3+3} i \begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix}$

$= c(dh - eg) - f(ah - bg) + i(ae - bd)$

$= cdh - ceg - fah + fbg + iae - ibd$

$= d(ch - bi) + e(ai - cg) - f(ah - bg)$

Ce sont 3 produit de coef parmi lesquels on est en c pris un par ligne et un par colone

Exercice n°18 :

$$P_A(x) = \begin{vmatrix} -x & 1 & -1 \\ -3 & 4-x & -3 \\ -1 & 1 & -x \end{vmatrix} \xrightarrow{C_3 \leftarrow C_3 - C_1} \begin{vmatrix} -x & 1 & -1+x \\ -3 & 4-x & 0 \\ -1 & 1 & 1-x \end{vmatrix}$$

$\downarrow L_1 \leftarrow L_1 + L_3$

$$= (-1)^{3+3}(1-x)\begin{vmatrix} -1-x & 2 \\ -3 & 4-x \end{vmatrix} \xleftarrow[\text{selon } C_3]{\text{Developpe}} \begin{vmatrix} 1-x & 2 & 0 \\ -3 & 4-x & 0 \\ -1 & 1 & 1-x \end{vmatrix}$$

$= (1-x)\left[(-1-x)(4-x) - (-3)\times 2\right]$

$= (1-x)\left[x^2 - 3x + 2\right] \Rightarrow \Delta = 9 - 8 = 1$ 2 racines

$\frac{3 \pm 1}{2} = 1$ et 2.

$= (1-x)(1-x)(2-x)$

$= (1-x)^2(2-x)$

$$P_B(x) = \begin{vmatrix} -x & 1 & 1 \\ 1 & -x & 1 \\ 1 & 1 & -x \end{vmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - L_2} \begin{vmatrix} -1-x & 1+x & 0 \\ 1 & -x & 1 \\ 1 & 1 & -x \end{vmatrix} \xrightarrow{C_2 \leftarrow C_2 + C_1} \begin{vmatrix} -1-x & 0 & 0 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 1 & 2 & -x \end{vmatrix}$$

developpement selon L_1 $\rightarrow$ $= (-1)^{1+1}(-1-x)\begin{vmatrix} 1-x & 1 \\ 2 & -x \end{vmatrix} = (-1-x)\left[x^2 - x - 2\right]$

$\Delta = 1 + 8 = 3^2$

2 racines : $\frac{1 \pm 3}{2} = 2$ et -1

$= (-1-x)\left[(-1-x)(2-x)\right] = (-1-x)^2(2-x)$.

Exercice n°19 :

Exercice n°19 : $\begin{vmatrix} a_1 & \cdots & \cdots & a_1 \\ \vdots & a_2 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & a_{n-1} & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & \cdots\, a_{n-1} & a_n \end{vmatrix}$

1e idée : On enlève la 1e colonne à toutes les autres ; on obtiens

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & a_2-a_1 & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & & \cdots & a_n-a_1 \end{vmatrix}$$

En développant selon la première ligne, on obtients :

$$= a_1 \begin{vmatrix} a_2-a_1 & \cdots & \\ \vdots & a_3-a_1 & \cdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ & & \cdots & a_n-a_1 \end{vmatrix}_{(n-1)}$$

Ce determinant à la même architecture → c'est une "relation de récurrence"

$(a_3-a_1)-(a_2-a_1)$

$$= a_1(a_2-a_1) \begin{vmatrix} a_3-a_2 & \cdots & \\ \vdots & a_4-a_2 & \cdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ & & \cdots & a_n-a_2 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow a_1(a_2-a_1)(a_3-a_2)(a_4-a_3)\dots(a_n-a_{n-1})$$
$$= a_1 \prod_{i=2}^{n} (a_i - a_{i-1})$$

2e idée : On enlève la dernière colonne à toutes les autres :

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ a_1-a_2 & & 0 & a_2 \\ a_1-a_3 & \ddots & & a_3 \\ \vdots & & a_{n-1}-a_n & \vdots \\ a_1-a_n & \cdots & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

Il y a 2 manière de se ramener à une matrice triangulaire.

* On developpe selon la première ligne :

$$= (-1)^{n+1} a_1 \begin{vmatrix} a_1-a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ & a_2-a_3 & 0 & 0 \\ ? & & \ddots & 0 \\ & & & a_{n-1}-a_n \end{vmatrix} = (-1)^{n+1} a_1 (a_1-a_2)(a_2-a_3)\dots(a_{n-1}-a_n)$$
$$= \cancel{(-1)^{n+1}}\cancel{(-1)^{n-1}} a_1 (a_2-a_1)\dots(a_n-a_{n-1})$$

* En effectuant $n-1$ permutations successives, on ramène la dernière colonne en tête :

$$= (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & a_1-a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & a_2-a_3 & 0 \\ a_n & \cdots & \cdots & a_{n-1}-a_n \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} a_1 (a_1-a_2) \dots (a_{n-1}-a_n)$$

3ᵉ idée : Pour j de n à 2 :

$$C_j \leftarrow C_j - C_{j-1}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ & a_2-a_1 & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & 0 & \\ & & & a_{n-1}-a_{n-2} & 0 \\ & & & & a_n-a_{n-1} \end{vmatrix}$$

$a_1(a_2-a_1)\dots(a_n-a_{n-1})$.

Exercice n°20 : Determinant de Vandermonde

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & x_2-x_1 & & & x_2^{n-2}-x_1x_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & x_n-x_1 & & & x_n^{n-1}-x_1x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

On developpe selon la première ligne en factorisant les termes :
$x_i^k - x_1 x_i^{k-1}$ en $(x_i - x_n) x_i^{k-1}$

$$= \begin{vmatrix} x_2-x_1 & (x_2-x_1)x_2 & \cdots & (x_2-x_1)x_2^{n-2} \\ x_3-x_1 & (x_3-x_1)x_3 & & (x_3-x_1)x_3^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n-x_1 & (x_n-x_1)x_n & \cdots & (x_n-x_1)x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$= (x_2-x_1)(x_3-x_1)\dots(x_n-x_1) \begin{vmatrix} 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-2} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \cdots & x_3^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

Determinant de Vandermonde de taille $n-1$

En itérant ce même procédé (ou par récurrence) on obtient :

$V(\dots) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\dots(x_n - x_1) \times (x_3 - x_2)\dots(x_n - x_2) \times \dots \times \dots \times (x_n - x_{n-1})$.

$= \prod_{j>i} (x_j - x_i) = \prod_{i=1}^{n-1} \prod_{j=i+1}^{n} (x_j - x_i)$ (ligne par ligne)

$= \prod_{j=2}^{n} \prod_{i=1}^{j-1} (x_j - x_i)$ (colonne par colonne).

Etude de la diagonalisabilité :

On calcule le polynome caractéristique P_A de la matrice A (sous forme factorisée)

→ si P_A n'est pas scindé, la matrice n'est pas diagonalisable

Sinon, il faut vérifier que pour toute racine λ de P_A (i.e valeur propre de A) on a : $\dim E_\lambda = m(\lambda)$

espace propre multiplicité

On a toujours $1 \leq \dim E_\lambda \leq m(\lambda)$ il faut donc tester tous les cas où $m(\lambda) \geq 2$. Si c'est le cas, en concaténant des bases, des espaces E_λ on trouve notre matrice de passage P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.