Algèbre Linéaire II

Exercice n°1 :

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} -1-X & 4 & 2 \\ 1 & -1-X & -1 \\ 0 & 4 & 1-X \end{vmatrix} \xrightarrow[L_1 \leftarrow L_1 - L_3]{} \begin{vmatrix} -1-X & 0 & 1+X \\ 1 & -1-X & -1 \\ 0 & 4 & 1-X \end{vmatrix}$$

$$\downarrow C_3 \leftarrow C_3 + C_1$$

$$(1-X)^2(1-X) = \begin{vmatrix} -1-X & 0 & 0 \\ 1 & -1-X & 0 \\ 0 & 4 & 1-X \end{vmatrix}$$

P_A est scindée : $Sp(A) = \{-1 ; 1\}$ avec

$m(-1) = 2 \rightarrow \dim E_1 = 1$ ou 2

$m(1) = 1 \rightarrow \dim E_1 = 1$ ✓

Cherchons la dimension (une base) de E_1

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1 \Leftrightarrow A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$[E_{-1} = \operatorname{Ker}(A + I_3)] \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 4y + 2z = -x \\ x - y - z = -y \\ 4y - z = -z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = -\frac{1}{2}z \\ z = z \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad E_1 = \operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$. $\dim E_1 = 1 \neq m(-1) = 2$

A n'est pas diagonalisable.

$$P_B(X) = \begin{vmatrix} -1-X & -2 & -2 \\ -3 & -1-X & -3 \\ 3 & 2 & 4-X \end{vmatrix} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 + L_1]{} \begin{vmatrix} -1-X & -2 & -2 \\ -3 & -1-X & -3 \\ 2-X & 0 & 2-X \end{vmatrix}$$

$$\downarrow C_1 \leftarrow C_1 - C_3$$

$$(1-X)(-1-X)(2-X) = \begin{vmatrix} 1-X & -2 & -2 \\ 0 & -1-X & -3 \\ 0 & 0 & 2-X \end{vmatrix}$$

P_B est scindé à racines simples, donc B est diagonalisable.

* Base de E_{-1}

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in E_{-1} \iff B\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \iff \begin{cases} -x-2y-2z=-x\\ -3x-y-3z=-y \\ 3x+2y+4z=-z\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -2y-2z=0\\ -3x-3z=0 \\ 3x+2y+5z=0\end{cases} \iff \begin{cases} y=-z\\ x=-z \\ 0=0\end{cases}$$

$$\iff \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = z\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}. \quad E_1 = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

• Base de E_1

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in E_1 \iff B\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} -x-2y-2z=x\\ -3x-y-3z=y \\ 3x+2y+4z=z\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -2x-2y-2z=0 & l_1\\ -3x-2y-3z=0 & l_2 \\ 3x+2y+5z=0 & l_3\end{cases} \iff \begin{cases} x+z=0 & l_1+l_3\\ 0=0 & l_2+l_3 \\ 3x+2y+3z=0 & l_3\end{cases} \iff \begin{cases} x=-z\\ z=0\end{cases} \quad \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = z\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$E_1 = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

* Base de E_2

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in E_2 \iff B\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \iff \begin{cases} -x-2y-2z=2x\\ -3x-y-3z=2y \\ 3x+2y+4z=2z\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -3x-2y-2z=0 & l_1\\ -3x-3y-3z=0 & l_2 \\ -3x+2y+2z=0 & l_3\end{cases} \iff \begin{cases} 0=0 & l_1+l_3\\ -y-z=0 & l_2+l_3 \\ 3x+2y+2z=0 & l_3\end{cases} \iff \begin{cases} y=-z\\ x=0\end{cases} \quad \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = z\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$$

$$E_2 = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

Conclusion : $B = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix}-1 & -1 & 0\\ -1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$

$$D = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

$P_C(X) \underset{C_3 = C_3 + C_2}{=} \underset{L_2 = L_2 - L_3}{\longrightarrow} \begin{vmatrix} 1-X & -2 & 0 \\ 0 & 1-X & 0 \\ -1 & 0 & 2-X \end{vmatrix}$

↓ développement selon C_3

$= (-1)^{3+3}(2-X)\begin{vmatrix} 1-X & -2 \\ 0 & 1-X \end{vmatrix}$

$= (2-X)(1-X)^2$

P_C est scindée ; $S_p(C) = \{1 ; 2\}$.

avec $m(1) = 2 \to \dim E_1 = 1$ ou 2

$m(2) = 1 \to \dim E_2 = 1$

C sera diagonalisable ssi $\dim E_1 = 2$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1 \Leftrightarrow C.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + 2z = x \\ x + y + z = y \\ -x \quad + 2z = z . \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -2y - 2z = 0 \\ -x + z = 0 \\ -x + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = z \\ x = z \end{cases}$

$E_1 = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

$\dim E_1 = 1 \neq m(1) = 2$

C n'est pas diagonalisable

4) $P_D(X) = \begin{vmatrix} 1-X & 2 & -2 \\ 2 & 1-X & -2 \\ 2 & 2 & -3-X \end{vmatrix} \underset{C_3 \leftarrow C_3 + C_1}{\longrightarrow} \underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_3}{\longrightarrow}$

↓

$\begin{vmatrix} -1-X & 0 & 0 \\ 2 & -1-X & 0 \\ 2 & 2 & -1-X \end{vmatrix}$

$= (-1-X)^2(1-X)$

P_D est scindé ; $S_p(D) = \{-1 ; 1\}$ avec

$m(-1) = 2$ — D est diagonalisable

$m(1) = 1$ — ssi $E_1 = 2$.

Calcul de E_1

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1 \Leftrightarrow D.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow -\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - 2z = -x \\ 2x + y - 2z = -y \\ 2x + 2y - 3z = -z \end{cases}$

$\Leftrightarrow 2x + 2y - 2z = 0 \Leftrightarrow x + y - z = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = x + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow E_1 = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Donc D est diagonalisable.

Cherchons une base de E_1

$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \in E_1 \Leftrightarrow D.\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} X + 2Y - 2Z = X \\ 2X + Y - 2Z = Y \\ 2X + 2Y - 3Z = Z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2Y - 2Z = 0 \\ 2X - 2Z = 0 \\ 2X + 2Y - 4Z = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} Y = Z \\ X = Z \\ 0 = 0 \end{cases}$ $\quad E_1 = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

CCL : $D = P.\Delta.P^{-1}$

et $\Delta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Exercice n°2 :

$P_A(X) = \begin{vmatrix} a - X & -1 & 1 \\ 0 & 2 - X & 0 \\ 1 & -1 & a - X \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{dev selon } L_2} (2 - X) \begin{vmatrix} a - X & 1 \\ 1 & a - X \end{vmatrix}$

$= (2 - X)[(a - X)^2 - 1]$.

$= (2 - X)(a + 1 - X)(a - 1 - X)$

P_A est scindé, ses racines sont $2, a - 1, a + 1$

- si $a \notin \{1; 3\}$: P_A est scindé à racines simples donc A est diagonalisable
- si $a = 1$; $a + 1 = 2$ donc 2 est une valeur propre double.

A diagonalisable $\Leftrightarrow \dim E_2 = 2$.

- si $a = 3$, $a - 1 = 2$ " "

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2 \Leftrightarrow \begin{cases} ax - y + z = 2x \\ -2y = 2y \\ x - y + az = 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-2)x - y + z = 0 \; (L_1) \\ x - y + (a-2)z = 0 \; (L_2) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (a-2)x - y + z = 0 \; (L_1) \\ (3-a)x + (a-3)z = 0 \; (L_2 - L_1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-3)x = (a-3)z \\ (a-2)x - y + z = 0. \end{cases}$

On distingue 2 cas :

- si $a = 3$ $\quad (a-3)x = (a-3)z \iff 0 = 0$ toujours vrai
- si $a \neq 3$ $\quad (a-3)x = (a-3)z \iff x = z$

Si $a = 3$:

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2 \iff x - y + z = 0 \iff \begin{cases} x = x \\ y = x + z \\ z = z \end{cases}$

$E_2 = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Rq : si $a = 3$, $\dim E_2 = 2 = m(2)$ donc A est diagonalisable.

Si $a \neq 3$:

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2 \iff \begin{cases} z = x \\ y = (a-2)x + z = (a-1)x \end{cases}$ $\quad E_2 = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ a-1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

En particulier, pour $a = 1$, $\dim E_2 = 1 \neq m(2)$
donc A n'est pas diagonalisable.

CCL : A diagonalisable $\iff a \neq 1$.

Calcul de E_{a+1} :

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{a+1} \iff \begin{cases} ax - y + z = (a+1)x \\ 2y = (a+1)y \\ x - y + az = (a+1)z \end{cases} \iff \begin{cases} -x - y + z = 0 & (\ell_1) \\ (1-a)y = 0 & (\ell_2) \\ x - y - z = 0 & (\ell_3) \end{cases}$

$\iff \begin{cases} -x - y + z = 0 \\ (1-a)y = 0 \\ -2y = 0 & (\ell_1 + \ell_3) \end{cases} \iff \begin{cases} y = 0 \\ x = z \end{cases}$ $\quad E_{a+1} = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Calcul de E_{a-1}

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{a-1} \iff \begin{cases} ax - y + z = (a-1)x \\ 2y = (a-1)y \\ x - y + az = (a-1)z \end{cases} \iff \begin{cases} x - y + z = 0 \\ (3-a)y = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} (3-a)y = 0 \\ x - y + 3 = 0 \end{cases}$

- si $a = 3$: $(a-3)y = 0 \iff 0 = 0$.

On retrouve le calcul de E_2 pour $a = 3$

- si $a \neq 3$: $(a-3)y = 0 \iff y = 0$.

$\begin{cases} y = 0 \\ x = -3 \end{cases}$ $\quad E_{a-1} = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$.

- si $a \neq 1$ $A = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a-1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & a+1 \end{pmatrix}$

encore vrai pour $a = 3$

car $\mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\} = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

Autre solution pour $a = 3$:

$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

2) $P_B(X) = \begin{vmatrix} -1-X & a+1 & 0 \\ 1 & a-X & 1 \\ 3 & -(a+1) & 2-X \end{vmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_1} \begin{vmatrix} -1-X & a+1 & 0 \\ 1 & a-X & 1 \\ 2-X & 0 & 2-X \end{vmatrix}$

$\downarrow C_1 \leftarrow C_1 - C_3$

$= (-1-X)(2-X)(a-X) = \begin{vmatrix} -1-X & a+1 & 0 \\ 0 & a-X & 1 \\ 0 & 0 & 2-X \end{vmatrix}$

$P_B(X)$ est scindé, $S_p(B) = \{-1, 2; a\}$.

- si $a \notin \{-1; 2\}$. P_B est scindé à racines simples donc B diagonalisable.
- si $a = -1$, -1 est racine double, B diagonalisable ssi $\dim E_1 = 2$.
- si $a = 2$, 2 est racine double, B diagonalisable ssi $\dim E_2 = 2$.

Cas $a=1$:

$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in E_1 \iff \begin{cases} -x = -x \\ x-y+z=-y \\ 3x+2z=-z \end{cases} \iff \begin{cases} x+z=0 \\ 3x+3z=0 \end{cases} \iff x=-z$.

$E_{-1} = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$

$\dim E_1 = 2 = m(-1)$ donc B diagonalisable.

Cas $a=2$:

$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in E_2 \iff \begin{cases} -x+3y=2x \\ x+2y+z=2y \\ 3x-3y+2z=2z \end{cases} \iff \begin{cases} -3x+3y=0 \\ x+z=0 \\ 3x-3y=0 \end{cases} \iff \begin{cases} y=x \\ z=-x \end{cases}$

$E_2 = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\right\}$. $\dim E_2 = 1 \neq m(2)$

B n'est pas diagonalisable

CCL: B est diagonalisable ssi $a \neq 2$.

$P_C(X) = \begin{vmatrix} 1-X & 0 & 1 \\ -1 & 2-X & 1 \\ 2-a & a-2 & a-X \end{vmatrix} \xrightarrow{C_1 \leftarrow C_1+C_2} \begin{vmatrix} 1-X & 0 & 1 \\ 1-X & 2-X & 1 \\ 0 & a-2 & a-X \end{vmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} 1-X & 0 & 1 \\ 0 & 2-X & 0 \\ 0 & a-2 & a-X \end{vmatrix}$

↓ dévelop selon C_1

$= (1-X)\begin{vmatrix} 2-X & 0 \\ a-2 & a-X \end{vmatrix} = (1-X)(2-X)(a-X)$

P_C est scindé, ses racines sont 1, 2, et a

→ si $a \notin \{1,2\}$, P_C est scindé à racines simples donc C est diagonalisable.

→ si $a=1$, 1 est racine double. À justifier : $\dim E_1 = 2$?

→ si $a=2$, 2 est racine double. À justifier : $\dim E_2 = 2$?

Cas $a=1$:

$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in E_1 \iff \begin{cases} x+z=x \\ -x+2y+z=y \\ x-y+z=z \end{cases} \iff \begin{cases} z=0 \\ x-y=0 \end{cases} \iff \begin{cases} z=0 \\ x=y \end{cases}$

$E_1 = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$ $\dim E_1 = 1 \neq m(1) = 2$.

C n'est pas diagonalisable.

Cas $a = 2$:

$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in E_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x + z = 2x \\ -x + 2y + z = 2y \\ 2z = 2z \end{cases} \Leftrightarrow -x + z = 0 \Leftrightarrow x = z$.

$E_2 = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$ $\dim E_2 = 2 = m(2)$

C diagonalisable

CCL : C diagonalisable $\Leftrightarrow a \neq 1$.

Exercice n° 7 : 1) Méthode 1 : Théorème des valeurs intermédiaires

$\ast$ $P(X) = \sum_{k=0}^{2n+1} a_k X^k$ $a_{2n+1} \neq 0$.

$\lim_{+\infty} P(x) = \lim_{+\infty} a_{2n+1} x^{2n+1} = \begin{cases} +\infty \text{ si } a_{2n+1} > 0 \\ -\infty \text{ si } a_{2n+1} < 0 \end{cases}$

$\lim_{-\infty} P(x) = \lim_{-\infty} a_{2n+1} \underbrace{x^{2n+1}}_{-\infty} = \begin{cases} -\infty \text{ si } a_{2n+1} > 0 \\ +\infty \text{ si } a_{2n+1} < 0 \end{cases}$

Donc P prend des valeurs positives et négatives. Toute fonction polynomiale étant continue, d'après le TVI, P s'annule.

Méthode 2 : Décomposition en polynôme irréductible

P admet une décomposition en facteur irréductibles sont :

- les polynomes de degré 1
- les polynômes de degré 2 avec Δ negatif.

Un polynome de degre impair ne peut pas contenir que des polynomes de degré 2 (sont degré serait un multiple de 2 sinon). donc il admet un facteur de degré 1

$\exists a \in \mathbb{R}$ $(X-a) \mid P(X)$ $d(X-a) \mid P$ signifie $P(a)=0$

2) $A^2+A+I=0$

$\lambda \in S_p(A)$ Soit X un vecteur propre associé.

$X \neq 0$ et $AX = \lambda X$

Par récurrence : $\forall k \in \mathbb{N}, A^k.X = \lambda^k X$.

$(A^2+A+I)X=0$ car $(A^2+A+I)=0$ matrice.

D'autre part, $(A^2+A+I)X = A^2X + AX + IX = \lambda^2 X + \lambda X + X = (\lambda^2+\lambda+1)X$

Or $X \neq 0$ donc $\lambda^2+\lambda+1=0$

Les racines de cette équation sont : $e^{2i\frac{\pi}{3}}$ et $e^{-2i\frac{\pi}{3}}$

donc $\lambda \in \{e^{2i\frac{\pi}{3}}, e^{-2i\frac{\pi}{3}}\}$

$e^{2i\frac{\pi}{3}} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ $e^{-2i\frac{\pi}{3}} = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$

b) Si $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, son polynome caractéristique est de degré 3, d'après Q_1, il admet donc au moins une racine réelle, donc A a une valeur propre réelle. $Sp_{\mathbb{R}}(A) \neq \emptyset$

Si $A^2+A+I=0$ $Sp(A) \in \{e^{2i\frac{\pi}{3}}, e^{-2i\frac{\pi}{3}}\}$ donc $Sp_{\mathbb{R}}(A) = \emptyset$

Les deux sont donc incompatibles.

Exercice n° 9 : $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ $P(f) = \sum_{k=0}^{n} a_k f^k$ où $f^k = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{k \text{ fois}}$.

1/2) Théorème spectrale

1) Soit λ une valeur propre de f et x un vecteur propre associé

Alors $f(x) = \lambda x$ et par récurrence $\forall k \in \mathbb{N}$, $f^k(x) = \lambda^k.x$

$(P(f))(x) = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k f^k\right)(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k f^k(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k x$

$= \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k\right).x = P(\lambda).x$

Donc $P(\lambda)$ est une valeur propre de $P(f)$ et x est encore un vecteur propre associé

2) Si $P(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$, $\forall x \in E$ $P(f)(x) = 0 = 0x$.

Donc $S_p(P(f)) = \{0\}$.

$\lambda \in S_p(f) \Rightarrow P(\lambda) \in S_p(P(f)) \Rightarrow P(\lambda) = 0$

3) $p \circ p = p$ d'où $p^2 - p = 0$

$X^2 - X = (X-1)X$ est un polynome annulateur de P. Ses racines sont 0 et 1

Donc $S_p(P) \subset \{0, 1\}$.

Exercice n°6 : $X = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ $X' = M \cdot X$ $M = PDP^{-1}$

$X' = PDP^{-1}X$ $P^{-1}X' = DP^{-1}X$.

On pose $P^{-1}X_{(t)} = Y_{(t)}$. $Y' = P^{-1}X'$ le système devient $Y' = DY$.

Si on note $Y = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$

le second système s'écrit $\begin{cases} u' = \lambda_1 u \\ v' = \lambda_2 v \\ w' = \lambda_3 w \end{cases}$ les solutions sont : $\begin{cases} u(t) = k_1 e^{\lambda_1 t} \\ v(t) = k_2 e^{\lambda_2 t} \\ w(t) = k_3 e^{\lambda_3 t} \end{cases}$

avec $(k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{R}^3$

On déduit x, y, z en calculant $X = PY$

$M = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -2 & 3 & 2 \\ 3 & -3 & -4 \end{pmatrix}$ $P_M(X) = \begin{vmatrix} 3-X & -2 & -4 \\ -2 & 3-X & 2 \\ 3 & -3 & -4-X \end{vmatrix} \xrightarrow{C_1 \leftarrow C_1 + C_3} \begin{vmatrix} -1-X & -2 & -4 \\ 0 & 3-X & 2 \\ -1-X & -3 & -4-X \end{vmatrix}$

$\downarrow L_3 \leftarrow L_3 - L_1$

$(-1-X)[X^2 - 3X + 2] = (-1)^{1+1} \times (-1-X) \begin{vmatrix} 3-X & 2 \\ -1 & -X \end{vmatrix} \xleftarrow[\text{selon } C_1]{\text{dev}} \begin{vmatrix} -1-X & -2 & -4 \\ 0 & 3-X & 2 \\ 0 & -1 & -X \end{vmatrix}$

$= (-1-X)(1-X)(2-X)$

P_M est scindé à racines simples. M est diagonalisable.

Cherchons une base de chaque espace propre.

E_{-1} : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-1} \iff \begin{cases} 3x - 2y + 4z = -x \\ -x + 3y + 2z = -y \\ 3x - 3y - 4z = -z \end{cases} \iff \begin{cases} 4x - 2y - 4z = 0 \\ -x + 4y + 2z = 0 \\ 3x - 3y - 3z = 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} 6y = 0 \iff y = 0 \\ x = z \\ x = z. \end{cases} \iff \begin{cases} y = 0 \\ x = z \end{cases}$ $E_{-1} = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

E_1 : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1 \iff \begin{cases} 3x - 2y + 4z = x \\ -x + 3y + 2z = y \\ 3x - 3y - 4z = z \end{cases} \iff \begin{cases} 2x - 2y + 4z = 0 \\ -x + 2y + 2z = 0 \\ 3x - 3y - 5z = 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} z = 0 \\ x = y \end{cases}$ $E_1 = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$

$\underline{E_2}$: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2 \iff \begin{cases} 3x - 2y + 4z = 2x \\ -x + 3y + 2z = 2y \\ 3x - 3y - 4z = 2z \end{cases} \iff \begin{cases} x - 2y + 4z = 0 \\ -x + y + 2z = 0 \\ 3x - 3y - 6z = 0 \end{cases}$

$L_1 + 2L_2 \rightarrow x = 0$

en réinjectant $\rightarrow y = -2z$. $E_2 = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

Q = 'P' :

$M = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Si on pose $Y = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = P^{-1}X$ on obtient le système

$Y' = DY$ $\begin{cases} u'(t) = -u(t) \\ v'(t) = v(t) \\ w'(t) = 2w(t) \end{cases}$ $\exists (k_{-1}, k_1, k_3) \in \mathbb{R}^3$ $\begin{cases} u(t) = k_{-1}e^{-t} \\ v(t) = k_1 e^{t} \\ w(t) = k_2 e^{2t} \end{cases}$

On a donc $X = PY$ càd $\begin{cases} x(t) = k_{-1} e^{-t} + k_1 e^{t} \\ y(t) = k_1 e^{t} - 2k_2 e^{2t} \\ z(t) = k_{-1} e^{-t} + k_2 e^{2t} \end{cases}$