Séries numériques

(trois semaines)

(du lundi 24 septembre 2018 au vendredi 12 octobre 2018)

Exercice 1

Considérons la série $\sum \frac{1}{n}$ et notons $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_{2n} - S_n \geqslant \frac{1}{2}$.
2. En déduire la divergence de la série $\sum \frac{1}{n}$.

Exercice 2

Soit (u_n) une suite réelle positive et décroissante.

Notons $(v_n) = \left(2^n u_{2^n}\right)$, $(S_n) = \left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)$ et $(T_n) = \left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right)$.

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$,
$$\frac{1}{2}v_{k+1} \leqslant S_{2^{k+1}} - S_{2^k} \leqslant v_k$$
2. En déduire que
$$\frac{1}{2}(T_{n+1} - v_0) \leqslant S_{2^{n+1}} - S_1 \leqslant T_n$$
3. En déduire que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.
4. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
Via le résultat de la question précédente, retrouver le résultat sur la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$.

Exercice 3

Étudier la nature des séries de terme général

1. $u_n = \ln\left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\right)$
2. $u_n = \big(\ln(n)\big)^{-\sqrt{n}}$
3. $u_n = e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
4. $u_n = \sqrt{n^3+n+1} - \sqrt{n^3+n-1}$
5. $u_n = \frac{2 \times 4 \times \cdots \times 2n}{(n!)^2}$

6. $u_n = \dfrac{(n!)^\alpha}{n^n}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$

7. $u_n = \left(\dfrac{n}{n+a}\right)^{n^2}$ où $a \in \mathbb{R}$

8. $u_n = \dfrac{n^2}{2^{n^2}}$

9. $u_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}a^n$ où $a \in \mathbb{R}_+^*$

10. $u_n = \dfrac{n^{\ln(n)}}{\big(\ln(n)\big)^n}$

Exercice 4

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$u_n = \ln\big((n-1)!\big) - \left(n - \frac{1}{2}\right)\ln(n) + n$$

1. Montrer que
$$u_{n+1} - u_n = 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

2. Montrer que
$$u_{n+1} - u_n \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{12n^2}$$

3. En déduire que (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.

4. Montrer que
$$e^{u_n} = \frac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}}$$
et en déduire que
$$n! \underset{+\infty}{\sim} e^\ell n^n e^{-n}\sqrt{n}$$

Exercice 5

Soient $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $\sum u_n$ où $u_n = \ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n^a}\right)$.

1. Déterminer la nature de $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{n^a}$ en fonction de a.

2. On a $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{(-1)^n}{n^a}$.

   Peut-on en conclure que $\sum u_n$ est de même nature que $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{n^a}$? Justifiez votre réponse.

3. Déterminer $k \in \mathbb{R}$ tel que $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^a} + \dfrac{k}{n^{2a}} + o\left(\dfrac{1}{n^{2a}}\right)$.

4. En déduire la nature de $\sum u_n$ en fonction de a.

Exercice 6

1. Soient $N \in \mathbb{N}$, (u_n) et (v_n) deux suites strictement positives telles que pour tout $n \geqslant N$,
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}$$
Montrer que $\sum v_n$ converge $\Longrightarrow \sum u_n$ converge.

2. Soit (u_n) une suite réelle strictement positive telle que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \dfrac{\alpha}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

   a. Soit $(v_n) = \left(\dfrac{1}{n^\beta}\right)$ où $\beta \in \mathbb{R}$.

   Montrer que $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = 1 - \dfrac{\beta}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

   b. On suppose que $\alpha > 1$. Montrer que $\sum u_n$ converge.

   N.B. : on pourra considérer $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $1 < \beta < \alpha$ et utiliser la suite (v_n) introduite dans la question précédente.

   c. On suppose $\alpha < 1$. Montrer que $\sum u_n$ diverge.

   N.B. : on pourra considérer $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha < \beta < 1$ et utiliser la suite (v_n) introduite dans la question a.

3. Étudier la nature de $\sum u_n$ où $u_n = \dfrac{2 \times 4 \times \cdots \times 2n}{3 \times 5 \times \cdots \times (2n+1)}$.

4. Discuter suivant les valeurs de $a \in \mathbb{R}_+$ de la nature de $\sum u_n$ où $u_n = \dfrac{n \times n!}{(a+1) \times \cdots \times (a+n)}$.

Exercice 7

Le but de cet exercice est de donner la nature de la série de terme général
$$u_n = (-1)^n n^\alpha \left(\ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)\right)^\beta$$
où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N} \backslash \{0, 1\}$.

1. Montrer que
$$\ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right) = \frac{2}{n}\left(1 + \frac{1}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

2. En déduire que
$$u_n = (-1)^n \frac{2^\beta}{n^{\beta-\alpha}}\left(1 + \frac{\beta}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

3. Montrer que si $\beta \leqslant \alpha$, la série $\sum u_n$ diverge.

4. Étude du cas $\beta > \alpha$.

a. Vérifier que

$$u_n = (-1)^n \frac{2^\beta}{n^{\beta-\alpha}} + v_n \quad \text{avec} \quad v_n = (-1)^n \frac{\beta 2^\beta}{3n^{2+\beta-\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2+\beta-\alpha}}\right).$$

b. Montrer que $\sum v_n$ est absolument convergente.

c. Montrer que la série de terme général $w_n = (-1)^n \frac{2^\beta}{n^{\beta-\alpha}}$ est convergente.

d. En déduire la nature de $\sum u_n$.

Exercice 8

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. On considère la série $\sum u_n$ où $u_n = \dfrac{\ln(1+n^\alpha)}{n^\beta}\cdot$

1. Montrer que la série $\displaystyle\sum \frac{1}{n^\alpha \big(\ln(n)\big)^\beta}$ converge ssi $\big((\alpha > 1) \text{ ou } (\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1)\big)$.

   N.B. : on distinguera les cas $\alpha < 0$ et $\alpha \geqslant 0$. Pour ce dernier cas, on utilisera les résultats de l'exercice 2.

2. On suppose $\alpha < 0$. Déterminer un équivalent de $\ln(1+n^\alpha)$ en $+\infty$. En déduire un équivalent de u_n en $+\infty$.
   En déduire la nature de $\sum u_n$ dans ce cas.

3. On suppose $\alpha > 0$. Montrer que $\ln(1+n^\alpha) \underset{+\infty}{\sim} \alpha \ln(n)$. En déduire un équivalent de u_n en $+\infty$.
   En déduire la nature de $\sum u_n$ dans ce cas.

4. On suppose $\alpha = 0$. Déterminer un équivalent de u_n au voisinage de $+\infty$. En déduire la nature de $\sum u_n$ dans ce cas.

5. Conclure sur la nature de $\sum u_n$ en fonction de α et β.

Exercice 9

On propose dans cet exercice de comparer les règles de Cauchy et de d'Alembert.

1. Démontrer le théorème de Cesàro : soit (u_n) une suite réelle convergeant vers $\ell \in \mathbb{R}$. Alors

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$$

2. En déduire que si $u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in \mathbb{R}$ alors $\dfrac{u_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

3. En déduire (pour une suite (u_n) strictement positive) que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in \mathbb{R}_+^* \Longrightarrow \sqrt[n]{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$$

4. Que pouvez-vous en conclure sur les règles de d'Alembert et Cauchy ?

5. Soient $(a,b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ avec $a \neq b$ et (u_n) définie par $\begin{cases} u_{2p} = a^p b^p \\ u_{2p+1} = a^{p+1} b^p \end{cases}$

   Comparer sur cette suite les règles de d'Alembert et de Cauchy.

Exercice 10

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que

- (u_n) est décroissante et converge vers 0.
- La suite $(V_n) = \left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right)$ est bornée.

1. Montrer que (u_n) converge ssi $\sum (u_n - u_{n+1})$ converge.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\sum_{k=0}^{n} u_k v_k = \left(\sum_{k=0}^{n} (u_k - u_{k+1}) V_k\right) + u_{n+1} V_n$$
3. En déduire que $\sum u_n v_n$ converge.
4. Soit $\theta \in \mathbb{R} \backslash 2\pi\mathbb{Z}$. Déterminer la nature de $\sum \frac{\cos(n\theta)}{n}$.