Corrigé du contrôle 1

Exercice 1 (3 points)

1. $u_n = n^2\left(1+\dfrac{1}{n^2}-1+\dfrac{1}{2n^2}+o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right) = \dfrac{3}{2}+o(1)$.

   Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{3}{2}$.

2. $\left(1+\dfrac{1}{an}\right)^{2n} = e^{2n\ln\left(1+\frac{1}{an}\right)} = e^{2n\left(\frac{1}{an}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{2/a+o(1)}$

   Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{an}\right)^{2n} = e^{2/a}$.

Exercice 2 (5,5 points)

1. $ne^{1/n}-n = n(e^{1/n}-1) = n\left(1+\dfrac{1}{n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)-1\right) = 1+o(1)$.

   Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} ne^{1/n}-n = 1$.

   Comme cette limite est non nulle, on en déduit immédiatement la divergence de la série $\sum\left(ne^{1/n}-n\right)$.

2. Notons $u_n = \dfrac{(n!)^a}{(2n)!}$.

   $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{((n+1)!)^a}{(2n+2)!}\times\dfrac{(2n)!}{(n!)^a} = \dfrac{(n+1)^a}{(2n+1)(2n+2)} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{n^a}{4n^2} = \dfrac{1}{4}n^{a-2}$.

   Donc
   - si $a>2$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et la série $\sum u_n$ diverge ;
   - si $a=2$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{4} < 1$ et la série $\sum u_n$ converge ;
   - si $a<2$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 < 1$ et la série $\sum u_n$ converge.

3. Soit $v_n = \frac{2^{\sqrt{n}}}{a^{n!}}$.

   $\sqrt[n]{v_n} = \frac{2^{1/\sqrt{n}}}{a^{(n-1)!}}$.

   Or $2^{1/\sqrt{n}} = e^{1/\sqrt{n}\ln(2)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et $a^{(n-1)!} = e^{(n-1)!\ln(a)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ car $a\in]0,1[$.

   Donc $\sqrt[n]{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ d'où $\sum v_n$ diverge via la règle de Cauchy.

4. Si $a>1$, $\sum\dfrac{(-1)^n}{n^a}$ converge absolument donc converge.

   Si $0<a\leqslant 1$, la suite $\left(\dfrac{(-1)^n}{n^a}\right)$ est alternée et vérifie le critère spécial car la suite $\left(n^a\right)$ est évidemment croissante et $\dfrac{1}{n^a} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

   Ainsi $\sum\dfrac{(-1)^n}{n^a}$ converge également dans ce cas.

Exercice 3 (6 points)

1. On a $\left\{\begin{array}{l} \dfrac{u_n}{u_{n-1}} \leqslant \dfrac{v_n}{v_{n-1}} \\ \vdots \qquad \vdots \\ \dfrac{u_{N+1}}{u_N} \leqslant \dfrac{v_{N+1}}{v_N} \end{array}\right.$

   En multipliant membre à membre ces inégalités, on a
   $$\frac{u_n}{u_{n-1}} \cdot \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}} \cdot \ldots \cdot \frac{u_{N+1}}{u_N} \leqslant \frac{v_n}{v_{n-1}} \cdot \frac{v_{n-1}}{v_{n-2}} \cdot \ldots \cdot \frac{v_{N+1}}{v_N}$$
   soit $\dfrac{u_n}{u_N} \leqslant \dfrac{v_n}{v_N}$ ou encore $0 < u_n \leqslant \dfrac{u_N}{v_N} v_n$.

   Donc si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge

2. a. $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{\beta} = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-\beta} = 1 - \dfrac{\beta}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$

   b. Soit $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $1 < \beta < \alpha$. Alors, via la question précédente,
   $$\begin{aligned}\frac{v_{n+1}}{v_n} - \frac{u_{n+1}}{u_n} &= 1 - \frac{\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) - 1 + \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\alpha-\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \\ &\underset{+\infty}{\sim} \frac{\alpha-\beta}{n} > 0\end{aligned}$$
   Donc il existe un rang N tel que pour tout $n \geqslant N$, $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} - \dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 0$ soit encore $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$.

   Or $\sum v_n$ converge donc $\sum u_n$ converge via la question 1.

   c. Soit $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha < \beta < 1$. Alors cette fois-ci, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - \dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{\beta-\alpha}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\beta-\alpha}{n} > 0$.

   Donc il existe un rang N tel que pour tout $n \geqslant N$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$.

   Or $\sum v_n$ diverge ($\beta < 1$) donc $\sum u_n$ diverge via la contraposée de la question 1.

3. $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n+2}{2n+3} = \frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{3}{2n}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{3}{2n}\right)^{-1}.$$
   Donc
   $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{3}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 1 - \frac{3}{2n} + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$
   d'où finalement
   $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$
   Ainsi, via la question 2.c., $\sum u_n$ diverge car $\dfrac{1}{2} < 1$

4. $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2}{n(a+n+1)} = \frac{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{a+1}{n}} = \left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{a+1}{n}\right)^{-1}$$
   d'où par un développement limité
   $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\left(1-\frac{a+1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 1 - \frac{a+1}{n} + \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$
   soit finalement
   $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{a-1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$
   Donc, via les questions 2.b. et 2.c., si $a-1 > 1$ i.e. $a > 2$ alors $\sum u_n$ converge et si $a - 1 < 1$ i.e. $a < 2$ alors $\sum u_n$ diverge.

Exercice 4 (3 points)

1. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\left(n^\alpha\left(1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)\right)^{1/2}} = \dfrac{(-1)^n}{n^{\alpha/2}} \cdot \dfrac{1}{\left(1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)^{1/2}}$.

2. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^{\alpha/2}}\left(1 - \dfrac{(-1)^n}{2n^\alpha} + o\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)\right) = \dfrac{(-1)^n}{n^{\alpha/2}} - \dfrac{1}{2n^{3\alpha/2}} + o\left(\dfrac{1}{n^{3\alpha/2}}\right)$.

3. $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^{\alpha/2}}$ converge via le critère spécial des séries alternées car la suite $\left(\dfrac{1}{n^{\alpha/2}}\right)$ est décroissante et tend vers 0.

   $\dfrac{1}{2n^{3\alpha/2}} + o\left(\dfrac{1}{n^{3\alpha/2}}\right) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n^{3\alpha/2}}$.

   Or la série de Riemann à termes positifs $\sum \dfrac{1}{2n^{3\alpha/2}}$ converge ssi $3\alpha/2 > 1$ c'est-à-dire $\alpha > 2/3$.

   Ainsi, la série $\sum\left(\dfrac{1}{2n^{3\alpha/2}} + o\left(\dfrac{1}{n^{3\alpha/2}}\right)\right)$ converge ssi $\alpha > 2/3$.

   De même pour la série $\sum\left(-\dfrac{1}{2n^{3\alpha/2}} + o\left(\dfrac{1}{n^{3\alpha/2}}\right)\right)$.

   Finalement $\sum u_n$ converge ssi $\alpha > 2/3$.

Exercice 5 (3 points)

$u_n = (n^3+2n)^{1/3} - (n^2+3)^{1/2} = n\left(\left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)^{1/3} - \left(1+\dfrac{3}{n^2}\right)^{1/2}\right)$.

Donc

$$u_n = n\left(1 + \frac{2}{3n^2} - 1 - \frac{3}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = -\frac{5}{6n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{5}{6n}$$

La série (de signe constant) $\sum -\dfrac{5}{6n}$ diverge donc $\sum u_n$ diverge également