TD : Séries numériques

Exercice n°1 : 1) $S_{2n} - S_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n}$

On encadre la somme par
* Son nombre de terme x le plus grand
* Son nombre de terme x le plus petit.

$$\frac{1}{2n} \times n \leqslant S_{2n} - S_n \leqslant \frac{1}{n+1} \times n .$$

$$\frac{1}{2} \leqslant S_{2n} - S_n \leqslant \frac{n}{n+1} < 1 .$$

1ère méthode 2) Par l'absurde, Supposons que (S_n) CV soit ℓ sa limite.
(S_{2n}) est une suite extraite de (S_n) et admet la même limite

$$S_{2n} \xrightarrow[+\infty]{} \ell$$

Alors $S_{2n} - S_n \xrightarrow[+\infty]{} \ell - \ell = 0$.
Impossible car $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_{2n} - S_n \geqslant \frac{1}{2}$.

$S_n \xrightarrow[+\infty]{} +\infty$ donc $\sum \frac{1}{n}$ diverge .

2e méthode : Encadrement asymptotique
$\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$1 \geqslant S_{2n} - S_n \geqslant \frac{1}{2}$$

$$1 \geqslant \cancel{S_2} - S_1 \geqslant \frac{1}{2}$$
$$1 \geqslant \cancel{S_4} - \cancel{S_2} \geqslant \frac{1}{2}$$
$$1 \geqslant \cancel{S_8} - \cancel{S_4} \geqslant \frac{1}{2}$$
$$\vdots$$

$1 \geqslant S_{2^n} - \cancel{S_{2^{n-1}}} \geqslant \frac{1}{2}$ On somme les inégalités

$$n \geqslant S_{2^n} - S_1 \geqslant \frac{n}{2}$$
$$n+1 \geqslant S_{2^n} \geqslant \frac{n}{2} + 1$$

Scanné par Hyperion

Remarque : On peut en déduire que $S_{2^n} \xrightarrow[+\infty]{} +\infty$. (la suite (S_n) étant croissante, elle a la même limite que ses sous-suites

donc $S_n \xrightarrow[+\infty]{} +\infty$

3) Soit $k \in \mathbb{N}^*$, alors $\exists! \, n \in \mathbb{N}$ tq $2^n \leq k < 2^{n+1}$ (S_n) est croissante donc

$\hookrightarrow n = \lfloor \log_2(k) \rfloor$

$$\frac{n}{2} + 1 \leq S_{2^n} \leq S_k \leq S_{2^{n+1}} \leq n+2$$

$$\frac{1}{2}\left(\lfloor \log_2(k) \rfloor + 2\right) \leq S_k \leq \lfloor \log_2(k) \rfloor + 2$$

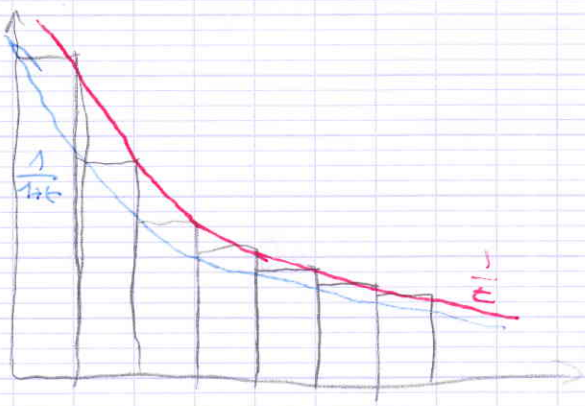
On a $U_n = O(V_n)$ ssi $\exists k$, $U_n \leq k V_n$.

$U_n = \Theta(V_n)$. $\exists (k_1, k_2)$ $k_1 V_n \leq U_n \leq k_2 V_n$.

Ici on a donc

$$S_k = \Theta(\log_2(k)).$$

En réalité, avec un encadrement à l'aide d'intégrales.



$$1 + \int_1^n \frac{1}{t} \, dt \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \int_0^n \frac{1}{1+t} \, dt$$

$1 + [\ln(t)]_1^n \geq S_n \geq [\ln(1+t)]_0^n$

$1 + \ln(n) \geq S_n \geq \ln(n+1)$

D'où $S_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n) = \ln(2) \log_2(n)$.

$\log_a(n) = \dfrac{\ln(n)}{\ln(a)}$

Maths ②

Exercice n°2: Lemme de condensation de Cauchy:

Si (u_n) est décroissante (positive)(tend vers 0)

Σu_n et $\Sigma 2^n u_{2^n}$ sont de même nature

1) $S_{2^{k+1}} - S_{2^k} = \sum_{i=0}^{2^{k+1}} u_i - \sum_{i=0}^{2^k} u_i = \sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} u_i$ | $2^{k+1} - (2^k+1) + 1$ termes $= 2^{k+1} - 2^k = 2^k$

$\sum_{i=p}^{q}$ $q-p+1$ termes.

La somme comporte 2^k termes, la suite (u_n) étant décroissante, le plus grand est u_{2^k+1} et le plus petit $u_{2^{k+1}}$. On a donc :

$$2^k u_{2^{k+1}} \leq S_{2^{k+1}} - S_{2^k} \leq 2^k u_{2^k+1}$$

$$2^k u_{2^{k+1}} \leq S_{2^{k+1}} - S_{2^k} \leq 2^k u_{2^k+1} \leq 2^k u_{2^k}$$

2) On somme ces inégalités pour k allant de 0 à n.

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2} V_{k+1} \leq \sum_{k=0}^{n} (S_{2^{k+1}} - S_{2^k}) \leq \sum_{k=0}^{n} V_k .$$

- $\sum_{k=0}^{n} V_k = T_n$

- $\sum_{k=0}^{n} (S_{2^{k+1}} - S_{2^k})$ est une somme télescopique.

$= S_{2^{n+1}} - S_{2^n} + S_{2^n} - S_{2^{n-1}} + \dots + S_4 - S_2 + S_2 - S_1$

$= S_{2^{n+1}} - S_1$.

changem- d'indice $k' = k+1$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2} V_{k+1} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} V_{k+1} = \frac{1}{2} \sum_{k'=1}^{k'=n+1} V_{k'} = \frac{1}{2}\left(\left(\sum_{k=0}^{n+1} V_k\right) - V_0\right).$$

$\Rightarrow \frac{1}{2}(T_{n+1} - V_0)$

Scanné par Hyperion

3) (S_{2n+1}) est une suite extraite de (S_n) qui est croissante, donc les deux suites ont la même limite ($\ell \in \mathbb{R}$ ou $\ell = +\infty$) et donc la même nature.

Il s'ensuit que $(S_{2n+1} - S_1)$ et (S_n) ont la même nature ($S_{2n+1} - S_1 \to \ell - S_1$). Montrons que (T_n) et $(S_{2n+1} - S_1)$ ont la même nature.

* Supposons que (T_n) diverge. Alors $T_n \to +\infty$. D'où $\frac{1}{2}(T_{n+1} - v_0) \xrightarrow[+\infty]{} +\infty$ et $\frac{1}{2}(T_{n+1} - v_0) \leq S_{2n+1} - S_1$ donc par le théorème des gendarmes.

$S_{2n+1} - S_1 \to +\infty$.

CCL : (T_n) DV $\Rightarrow$ $(S_{2n+1} - S_1)$ DV.

* Supposons que $(S_{2n+1} - S_1)$ DV.

Alors $S_{2n+1} - S_1 \leq T_n$ donc $T_n \to +\infty$.

CCL : $(S_{2n+1} - S_1)$ DV $\Rightarrow$ (T_n) DV.

Par double implication : (T_n) DV $\Leftrightarrow$ $(S_{2n+1} - S_1)$ DV donc (T_n) et $(S_{2n+1} - S_1)$ sont de même nature

En conclusion, (T_n) et (S_n) sont de même nature, càd Σu_n et Σv_n sont de même nature.

Autre méthode : Mq (T_n) CV $\Rightarrow$ $(S_{2n+1} - S_1)$ CV.

(T_n) converge donc est majorée.

$\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, T_n \leq M$ donc $S_{2n+1} - S_1 \leq T_n \leq M$.

$(S_{2n+1} - S_1)$ est une suite croissante et majorée donc elle converge $\square$

4) Si $\alpha < 0$:

$\frac{1}{n^\alpha} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty \neq 0$ $\quad \Sigma \frac{1}{n^\alpha}$ DV.

si $\alpha = 0$

$\frac{1}{n^\alpha} \to 1 \neq 0$. $\Sigma \frac{1}{n^\alpha}$ DV.

si $\alpha > 0$

$\frac{1}{n^\alpha} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ De plus, la suite $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ est décroissante, on peut appliquer le lemme de condensation : $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ est de même nature que $\sum 2^n \frac{1}{(2^n)^\alpha}$

$2^n \times \frac{1}{(2^n)^\alpha} = 2^n \cdot (2^n)^{-\alpha} = (2^n)^{1-\alpha} = (2^{(1-\alpha)})^n$

$\sum (2^{(1-\alpha)})^n$ est une série géométrique.

elle converge ssi $|2^{1-\alpha}| < 1$.

$\iff 2^{1-\alpha} < 1$.

$\iff 1-\alpha < \log_2(1) = 0$

$\iff \alpha > 1$

$\sum \frac{1}{n^\alpha}$ CV $\iff \alpha > 1$. (Devrait tomber à chaque QCM)

Rappel des Développement limités :

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + o(x^n)$$

$\alpha = cst$

$$(1+x)^\alpha = \frac{\prod_{i=0}^{k-1} (\alpha - i)}{k!} x^k + o(x^n)$$

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} \left| \begin{array}{l} + o(x^{2n}) \\ + o(x^{2n+1}) \end{array} \right.$$

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} \left| \begin{array}{l} + o(x^{2n+1}) \\ + o(x^{2n+2}) \end{array} \right.$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^k)$$

Exercice n°3 : 1) $U_n = \ln\left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\right)$

$\ln(1+u) = u + o(u)$

$$\ln\left(1+\frac{1}{n^2+2n}\right) = \frac{1}{n^2+2n} + o\left(\frac{1}{n^2+2n}\right)$$

$$\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2+2n}} = \frac{n^2+2n}{n^2} = 1+\frac{2}{n} \xrightarrow[+\infty]{} 1$$

Donc $\frac{1}{n^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2+2n}$

$U_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2+2n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$

la série $\Sigma \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente (car $2>1$), par comparaison de séries à termes positifs. ΣU_n est convergente

Rq. À l'aide de sommes télescopiques on peut même calculer une formule explicite pour la somme partielle et la somme de la série

1.bis) $\ln\left[\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right] = 2\ln(n+1) - \ln(n) - \ln(n+2)$

$$\sum_{k=1}^{n} U_k = \sum_{k=1}^{n}\left(2\ln(k+1) - \ln(k) - \ln(k+2)\right)$$

$$= 2\sum_{k=1}^{n}\ln(k+1) - \sum_{k=1}^{n}\ln(k) - \sum_{k=1}^{n}\ln(k+2)$$

$$= 2\sum_{k=2}^{n+1}\ln(k) - \sum_{k=1}^{n}\ln(k) - \sum_{k=3}^{n+2}\ln(k).$$

$$= -\ln(1) + \ln(2) + \ln(n+1) - \ln(n+2).$$

$$= \ln(2) + \ln\left(\frac{n+1}{n+2}\right).$$

$\frac{n+1}{n+2} \xrightarrow[+\infty]{} 1$ donc $\ln\left(\frac{n+1}{n+2}\right) \xrightarrow[+\infty]{} 0$

Ainsi $\sum_{k=1}^{+\infty} \ln\left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\right) = \ln(2)$.

2) Règle de Riemann :

si $\begin{cases} n^{\alpha} U_n \longrightarrow 0 \\ \alpha > 1 \end{cases} \Rightarrow \sum U_n$ CV ← Plus généralement $\ell \in \mathbb{R}$.

si $\begin{cases} n^{\beta} U_n \longrightarrow +\infty \\ \beta \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \sum U_n$ DV ← Plus généralement tout sauf 0

Montrons que $n^2 U_n \to 0$

$k \in \mathbb{R}$, $x^k = \underset{+\infty}{o}(e^x)$

$k > 0$, $\ln(x) = o(x^k)$

$n^{\alpha} U_n = n^{\alpha} (\ln(n))^{-\sqrt{n}} = e^{\alpha \ln(n) - \sqrt{n} \ln[\ln(n)]}$.

$= e^{\left[\alpha \ln(n) \left[1 - \frac{\sqrt{n} \ln(\ln(n))}{\alpha \ln(n)}\right]\right]} \xrightarrow{} -\infty$

$\alpha \ln(n) = o(\sqrt{n})$

donc $\frac{\sqrt{n}}{\alpha \ln(n)} \longrightarrow +\infty$ d'où $\frac{\sqrt{n}}{\alpha \ln(n)} \times \ln(\ln(n)) \longrightarrow +\infty$

CCL : $n^{\alpha} U_n \xrightarrow[+\infty]{} 0$ $\forall \alpha > 0$ En particulier pour $\alpha = 2$.

$n^2 U_n \to 0$, $U_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

$\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente ; par comparaison de série à termes positifs, $\sum U_n$ CV.

$a^b = e^{b \ln(a)}$

3) $e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e - e^{n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}$.

$= e - e^{n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} = e - e^{1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)} = e - e^1 \cdot e^{\underbrace{-\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}_{u \to 0}}$

DL de e^u

$= e\left(1 - e^{-\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}\right) = e\left(1 - \left[1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right]\right)$

$= \frac{e}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{e}{2n} = \frac{e}{2} \cdot \frac{1}{n} = \sum \frac{e}{2n} = \frac{e}{2} \sum \frac{1}{n}$ est une série de Riemann divergente par comparaison de série à termes positifs. $\sum U_n$ DV.

$\sqrt{a}\ \sqrt{b}$

$= \dfrac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

$= \dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

4) $\sqrt{n^3+n+1} = \sqrt{n^3\left(1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}\right)} = \sqrt{n^3}\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}}$

QCM 1 :

11) abcd :

$\sin(x^2) = x^2 - \frac{1}{6}x^6 + o(x^6)$.

$f = \underset{a}{o}(g) \Rightarrow \frac{f}{g} \xrightarrow[a]{} 0$ $\quad f = O(g) ; \exists k \in \mathbb{R}^+ , |f| \leq k|g|$

$f \sim g \Rightarrow \frac{f}{g} \to 1$.

$f = O(g)$ $\frac{f}{g}$ bornée

en 0 :

$t^2 \cdot o(t^3) = o(t^5)$ $\quad o(t+t^2) = o(t)$

$\frac{1}{t^2} \cdot o(t^3) = o(t)$ $\quad o(t) + o(t^2) = o(t)$.

$o(t^3) \cdot o(t^2) = o(t^5)$ $\quad o(t) + o(t) = o(t)$

$\lambda o(t) = o(t)$.

$-o(t) = o(t)$.

12) $\sin^2(x) = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2$

$= x^2 - \underbrace{\frac{x^4}{3} + o(x^4)}_{o(x^2)}$ $\Rightarrow$ ab.

$o(x^3)$

$\cancel{o(x^4)}$

13) $\sqrt[3]{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}x + o(x)$. $\Rightarrow$ c

14) $\frac{t^3}{t^2} = t \xrightarrow[t\to 0]{} 0$ donc $t^3 = o(t^2)$

$\frac{t^3}{t^2} = \frac{1}{t} \underset{t\to 0}{\not\to} 0$

$\frac{t^3 + o(t^3)}{t^3} = 1 + o(1) \to 1$.

$t^3 + o(t^3) \underset{0}{\sim} t^3$

$\frac{t^4 + o(t^3)}{t^3} = t + o(1) \to 0$

$t^4 + o(t^3) = o(t^3)$

$\Rightarrow$ ad

Scanné par Hyperion

(15) $\ln(1-x) = -x - \frac{1}{2}(-x)^2 + \frac{1}{3}(-x)^3 + o(x^3)$

$= -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$

$\Rightarrow a$

16) $\sum q^n$ CV $\Leftrightarrow |q| < 1 \Rightarrow d$.

17) $\sum U_n$ CV $\Rightarrow U_n \to 0$

$U_n \not\to 0 \Rightarrow \sum U_n$ DV

$U_n \to \ell \quad \ell \neq 0$.

U_n n'a pas de limite.

18) $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ CV $\Leftrightarrow \alpha > 1$.

Critère de d'Alembert: $(U_n) > 0$ tq $\frac{U_{n+1}}{U_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$

Critère de Cauchy: $(U_n) \geq 0$ tq $\sqrt[n]{U_n} = U_n^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$

$\ell \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.

$$\begin{cases} \text{si } \ell < 1 & \sum U_n \text{ CV} \\ \text{si } \ell > 1 & \sum U_n \text{ DV} \\ \text{si } \ell = 1 & \text{On ne peut pas conclure} \end{cases}$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(4k)!\,(1103 + 26390k)}{(k!)^4 \; 396^{4k}} = \frac{9801}{2\sqrt{2}\cdot\pi} \qquad \frac{U_{n+1}}{U_n} \to \frac{1}{99^4} \simeq 10^{-8}.$$

Pour avoir les décimales de Pi.

Exercice n°3 :

4) $\underbrace{\sqrt{n^3+n+1}}_{\substack{\to 0\\+\infty}} = \sqrt{n^3\left(1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}\right)} = n^{3/2}\sqrt{\left(1+\underbrace{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}}_{\substack{\to 0\\+\infty}}\right)}$

On ne peut pas utiliser les DL.

$$n^{3/2}\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}\right)-\frac{1}{8}\underbrace{\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}\right)^2}_{\frac{1}{n^4}+\frac{2}{n^5}+\frac{1}{n^6}}+o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right).$$

$$= n^{3/2}\left(1+\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{2n^3}-\frac{1}{8n^4}+o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)$$

$\sqrt{n^3+n-1}$

$$= n^{3/2}\left(1+\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{2n^3}-\frac{1}{8n^4}+o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right) = n^{3/2}\left(\frac{1}{n^3}+o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right).$$

$$= \frac{1}{n^{3/2}}+o\left(\frac{1}{n^{5/2}}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^{3/2}}$$

$\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ est une série de Riemann positive et convergente ($\alpha = \frac{3}{2} > 1$) et $U_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^{3/2}}$. Par comparaison de série à termes positifs $\sum U_n$ CV.

$$\sqrt{+}-\sqrt{-} = \frac{2}{\sqrt{n^3+n+1}+\sqrt{n^3+n-1}} = \frac{2}{n^{3/2}\underbrace{\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^3}}\right)}_{1+1=2}}$$

$$\underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{n^{3/2}\cdot 2} = \frac{1}{n^{3/2}}$$

5) On utilise le critère d'Alembert (pour cause de factorielle).

$$2\times 4\times 6\times\ldots\times 2n = \underline{2\times 1}\times\underline{2\times 2}\times\underline{2\times 3}\times\ldots\times\underline{2\times n} = 2^n\cdot n!$$

$$U_n = \frac{2^n n!}{n!^2} = \frac{2^n}{n!}$$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\times\frac{n!}{2^n} = \frac{2^{n+1}}{2^n}\times\frac{n!}{(n+1)!} = 2\times\frac{1}{n+1} = \frac{2}{n+1} \xrightarrow[+\infty]{} 0.$$

$0<1$ donc d'après le critère de d'Alembert, $\sum U_n$ CV.

Scanné par Hyperion

6) Critère de d'Alembert :

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{[(n+1)!]^\alpha}{(n+1)^{n+1}} \times \frac{n^n}{(n!)^\alpha} = \left(\frac{(n+1)!}{n!}\right)^\alpha \frac{n^n}{(n+1)^n (n+1)}$$

$$= (n+1)^{\alpha-1} \times \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = (n+1)^{\alpha-1} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n}$$

$$\lim_{+\infty} (n+1)^{\alpha-1} = \begin{cases} +\infty \text{ si } \alpha > 1 \\ 1 \text{ si } \alpha = 1 \\ 0 \text{ si } \alpha < 1 \end{cases}$$

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} = e^{-n\ln(1+\frac{1}{n})} = e^{-n(\frac{1}{n}+o(\frac{1}{n}))}.$$

$$= e^{-1+o(1)} \xrightarrow[+\infty]{} e^{-1} = \frac{1}{e}$$

si $\alpha > 1$, $\frac{U_{n+1}}{U_n} \longrightarrow +\infty > 1$ donc $\sum U_n$ DV.

si $\alpha = 1$, $\frac{U_{n+1}}{U_n} \longrightarrow \frac{1}{e} < 1$ donc $\sum U_n$ CV

si $\alpha < 1$, $\frac{U_{n+1}}{U_n} \longrightarrow 0 < 1$ donc $\sum U_n$ CV.

7) Critère de Cauchy

$$(U_n)^{1/n} = \left[\left(\frac{n}{n+a}\right)^{n^2}\right]^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{n}{n+a}\right)^n = \left(\frac{n+a}{n}\right)^{-n} = \left(1+\frac{a}{n}\right)^{-n}$$

$$= e^{-n\ln(1+\frac{a}{n})} = e^{-n(\frac{a}{n}+o(\frac{1}{n}))} = e^{-a+o(1)} \xrightarrow[+\infty]{} e^{-a}$$

- si $a < 0$, $e^{-a} > 1$ donc $\sum U_n$ DV.
- si $a > 0$, $e^{-a} < 1$ donc $\sum U_n$ CV.
- Si $a = 0$, $e^{-a} = 1$. le critère ne permet pas de conclure.

Cas $a = 0$: $U_n = \left(\frac{n}{n}\right)^{n^2} = 1^{n^2} = 1$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = 1 \underset{+\infty}{\not\to} 0$ donc $\sum U_n$ DV.

CCL : $\sum U_n$ CV $\Leftrightarrow a > 0$.

8) Avec le critère de ~~d~~ d'Alembert

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{(n+1)^2}{2^{(n+1)^2}} \times \frac{2^{n^2}}{n^2} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \times \frac{2^{n^2}}{2^{(n+1)^2}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \times \frac{1}{2^{2n+1}}$$

$\xrightarrow[+\infty]{} 1 \times 0 = 0 < 1$, donc ΣU_n CV.

8bis) Avec le critère de Cauchy.

$$U_n^{1/n} = \left(\frac{n^2}{2^{n^2}}\right)^{1/n} = \frac{n^{2/n}}{2^n} \Leftrightarrow n^{2/n} = e^{\frac{2}{n}\ln(n)}$$

Par croissance comparée, $\frac{\ln(n)}{n} \to 0$

$n^{2/n} = e^{2\frac{\ln(n)}{n}} \xrightarrow[+\infty]{} e^0 = 1$

$2^n \to +\infty$ donc $(U_n)^{1/n} = \frac{n^{2/n}}{2^n} \xrightarrow[+\infty]{} 0 < 1$ donc ΣU_n CV.

9) Avec le critère de d'Alembert :

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{(n+1)!^2 a^{n+1}}{(2n+2)!} \times \frac{(2n)!}{(n!)^2 a^n} = \left(\frac{(n+1)!}{n!}\right)^2 \times \frac{(2n)!}{(2n+2)!} \times \frac{a^{n+1}}{a^n}$$

$$= (n+1)^2 \times \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} a = \frac{a(n+1)}{4n+2} \xrightarrow[+\infty]{} \frac{a}{4}$$

- Si $a > 4$, $\frac{a}{4} > 1$ donc ΣU_n DV
- Si $a < 4$, $\frac{a}{4} < 1$ donc ΣU_n CV
- Si $a = 4$, $\frac{a}{4} = 1$, le critère de d'Alembert ne peut pas conclure

Cas $a = 4$: $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{4n+4}{4n+2} > 1$. donc la suite (U_n) est croissante

(U_n) est une suite strictement positif et strictement croissante, donc $U_n \not\to 0$. D'après le critère nécessaire de CV : ΣU_n DV

CCL : ΣU_n CV $\Leftrightarrow a < 4$

10) Critère de Cauchy:

$$(U_n)^{1/n} = \left(\frac{n^{\ln(n)}}{(\ln(n))^n} \right)^{1/n} = \frac{n^{\frac{\ln(n)}{n}}}{\ln(n)}$$

Forme indeterminée: $n^{\frac{\ln(n)}{n}} = e^{\frac{\ln(n)}{n}\ln(n)} = e^{\frac{\ln^2(n)}{n}}$.

Par croissance comparée:

$\frac{\ln^2(n)}{n} \xrightarrow[+\infty]{} 0$ donc $n^{\frac{\ln(n)}{n}} \longrightarrow e^0 = 1$.

$\ln(n) \xrightarrow[+\infty]{} 0$ donc $U_n^{1/n} \xrightarrow[+\infty]{} 0 < 1$ donc $\sum U_n$ CV.

Exercice n°4: Formule de Stirling:

$$n! \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^n}{e^n}\sqrt{2\pi n}$$

1) $U_{n+1} - U_n = \ln(n!) - (n + \frac{1}{2})\ln(n+1) \cancel{+n} + 1 - \ln((n-1)!) + (n - \frac{1}{2}) \ln(n) \cancel{-n}$

$= \ln\left(\frac{n!}{(n-1)!}\right) - (n + \frac{1}{2})\ln(n+1) + (n - \frac{1}{2})\ln(n) + 1.$

$= \ln(n) - (n+\frac{1}{2})\ln(n+1) + (n - \frac{1}{2})\ln(n) + 1$

$= 1 - (n + \frac{1}{2})\ln(n+1) + (n + \frac{1}{2})\ln(n).$

$= 1 - (n + \frac{1}{2})[\ln(n+1) - \ln(n)].$

$= 1 - (n + \frac{1}{2})\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$

$= 1 - (n + \frac{1}{2})\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$

2) $1 - (n + \frac{1}{2})\left[\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right].$

$= 1 - \left(1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) + \frac{1}{2n} - \frac{1}{4n^2} + \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)$

$= -\left(\frac{1}{3n^2} - \frac{1}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{-1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{-1}{12n^2}$

$\sum \frac{-1}{12n^2}$ est une série de Riemann convergente, par comparaison de séries à termes négatifs

$\sum(U_{n+1} - U_n)$ CV.

Lemme télescopique : $\sum(U_{n+1} - U_n)$ et (U_n) ont la même nature

Preuve:

$\sum_{k=0}^{n-1} (U_{k+1} - U_k) = U_n - U_0$.

CCL : la suite (u_n) est convergente.

4) $\lim_{n \to +\infty} U_n = P$

$e^f \sim e^g \iff f - g \to 0$.

$f - g \to 0 \iff e^{f-g} \to e^0$

$\iff \frac{e^f}{e^g} \to 1$.

$U_n - P \underset{+\infty}{\to} 0$ donc $e^{U_n} \underset{+\infty}{\sim} e^P$

$e^{U_n} = e^{\ln[(n-1)!] - (n - \frac{1}{2})\ln(n) + n}$

$= (n-1)!\, n^{-n+\frac{1}{2}} e^n = \frac{n(n-1)!}{n} \times \frac{\sqrt{n}}{n} e^n = \frac{n!\, e^n}{n^n \sqrt{n}}$

On a alors : $n! = \frac{n^n \sqrt{n}}{e^n} e^{U_n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^n \sqrt{n}}{e^n} e^P$

Exercice n°6 : 1) Critère de comparaison logarithmique

$(U_n) > 0$, $(V_n) > 0$ tq à partir d'un certain rang, $\frac{U_{n+1}}{U_n} \leq \frac{V_{n+1}}{V_n}$

alors $\sum V_n$ CV $\Rightarrow \sum U_n$ CV.

2) Règle de Duhamel (Raabe)

si $\frac{U_{n+1}}{U_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$

Si $\alpha > 1$, $\sum U_n$ CV

Si $\alpha < 1$, $\sum U_n$ DV

Si $\alpha = 1$ on ne peut tj pas conclure.

Scanné par Hyperion

Maths (6)

$\frac{U_{N+1}}{U_N} \leqslant \frac{V_{N+1}}{V_N}$ $\quad \frac{\cancel{U_{N+1}}}{U_N} \times \frac{\cancel{U_N}}{\cancel{U_{N+1}}} \times \cdots \times \frac{U_n}{\cancel{U_{n-1}}} \leqslant \frac{\cancel{V_{N+1}}}{V_N} \times \frac{\cancel{V_N}}{\cancel{V_{N+1}}} \times \cdots \times \frac{V_n}{\cancel{V_{n-1}}}$

$\frac{U_{N+2}}{U_{N+1}} \leqslant \frac{V_{N+2}}{V_{N+1}}$ $\quad \frac{U_n}{U_N} \leqslant \frac{V_n}{V_N}$ (U_N, V_N) CST

$\vdots$

$\frac{U_n}{U_{n-1}} \leqslant \frac{V_n}{V_{n-1}}$ $\quad 0 \leqslant U_n \leqslant \underbrace{\left(\frac{U_N}{V_N}\right)}_{CST} V_n$.

$U_n = O(V_n)$ d'où ΣV_n CV $\Rightarrow \Sigma U_n$ CV.

2) a) $V_n = \frac{1}{n^\beta}$ $\quad \frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{\left(\frac{1}{n+1}\right)^\beta}{\frac{1}{n^\beta}} = \frac{n^\beta}{(n+1)^\beta} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^\beta = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-\beta}$

$\frac{V_{n+1}}{V_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-\beta}$ [DL de $(1+u)^{-\beta} = 1 - \beta u$ du].

$\frac{V_{n+1}}{V_n} = 1 - \frac{\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

b) $\frac{V_{n+1}}{V_n} - \frac{U_{n+1}}{U_n} = \left(1 - \frac{\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \left(1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$.

$= \frac{\alpha - \beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\alpha-\beta}{n}$ si $\alpha \neq \beta$.

c) $\alpha < \beta \leqslant 1$.

2) b) $\alpha > 1$.

Soit β tel que $1 < \beta < \alpha$. $\quad$ Donc $\frac{V_{n+1}}{V_n} - \frac{U_{n+1}}{U_n} \underset{+\infty}{\geqslant} 0$

$\alpha >$ donc $\alpha - \beta > 0$

$\frac{\alpha - \beta}{n} > 0$. $\quad \frac{V_{n+1}}{V_n} > \frac{U_{n+1}}{U_n}$ d'où

$[\Sigma V_n$ CV $\Rightarrow \Sigma U_n$ CV$]$

D'autre part, $\beta > 1$ donc $\sum V_n = \sum \frac{1}{n^\beta}$ est une série de Riemann convergente. En combinant ces deux résultats, $\sum U_n$ CV

2c) $\alpha < 1$

Soit β tel que $\alpha < \beta \leq 1$.

$\alpha - \beta \leq 0$

$\frac{\alpha - \beta}{n} < 0$.

Donc $\frac{V_{n+1}}{V_n} \underset{+\infty}{\leq} \frac{U_{n+1}}{U_n}$.

D'où : $[\sum V_n \text{ DV} \Rightarrow \sum U_n \text{ DV}]$. (contraposée de la q 1).

Or $\sum V_n = \sum \frac{1}{n^\beta}$ est une série de Riemann divergente. car $\beta \leq 1$

On obtient : $\sum U_n$ DV.

Règle de Duhamel / Raabe :

$\frac{U_{n+1}}{U_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o(\frac{1}{n})$.

si $\alpha > 1$ $\sum U_n$ CV

si $\alpha < 1$ $\sum U_n$ DV

si $\alpha = 1$ on ne peut pas conclure

3) $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{2 \times 4 \times \dots \times 2n \times (2(n+1))}{3 \times 5 \times \dots \times (2n+1) \times (2n+3)} \times \frac{3 \times 5 \times \dots \times (2n+1)}{2 \times 4 \times \dots \times (2n)} = \frac{2n+2}{2n+3}$.

$\left(\underset{+\infty}{\sim} \frac{2n}{2n} = 1 \underset{+\infty}{\longrightarrow} 1 \right)$.

$= \frac{2n(1+\frac{1}{n})}{2n(1+\frac{3}{2n})} = (1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})^{-1} \Rightarrow DL \Rightarrow 1 - \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})$.

4) $\dfrac{U_{n+1}}{U_n} = \dfrac{(n+1)(n+1)!}{(a+1)\times\dots\times(a+n)\times(a+n+1)} \times \dfrac{(a+1)\times\dots\times(a+n)}{n\dots n!}$

$= \dfrac{(n+1)!}{n!} \times \dfrac{(n+1)}{n\times(n+a+1)} = \dfrac{(n+1)^2}{n(n+a+1)} \left(\underset{+\infty}{\sim} \dfrac{n^2}{n^2} = 1\right)$

$= \dfrac{\cancel{n^2}\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{\cancel{n^2}\left(1+\frac{a+1}{n}\right)} = \left(1+\dfrac{2}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)\left(1+\dfrac{a+1}{n}\right)^{-1}$

$= \left(1+\dfrac{2}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)\left[1-\dfrac{a+1}{n}+o(n)\right] = 1-\dfrac{a+1}{n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)+\dfrac{2}{n}+(\dots)$

$= 1-\dfrac{a-n}{n}+o(n).$

D'après la règle de duhamel.

- si $a>2$ $(a-1>1)$
  ΣU_n CV
- si $a<2$ $(a-1<1)$
  ΣU_n DV
- si $a=2$ $(a-1=1)$
  On ne peut pas conclure

cas où $a=2$

$U_n = \dfrac{n.n!}{3\times 4\times\dots\times(n+2)} = \dfrac{(n+2)!}{2!}$.

$U_n = \dfrac{2n\,n!}{(n+2)!} = \dfrac{2n}{(n+1)(n+2)} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2n}{n^2} = \dfrac{2}{n}$

$\Sigma \frac{2}{n}$ est une série de Riemann divergente par comparaison de séries à termes positifs, ΣU_n DV.

Exercice n°5: 1) Séries de Riemann alternées: $\Sigma \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$ CV $\Leftrightarrow \alpha>0$.

- si $\alpha\leq 0$: $\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha} \underset{+\infty}{\not\to} 0$ Donc $\Sigma \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$ DV.

- $\alpha>0$, la suite est décroissante et tend vers 0, d'après le critère de Leibniz (critère spécial de convergence des suites alternées)
  $\Sigma (-1)^n \dfrac{1}{n^\alpha}$ CV.

2) On ne peut pas utiliser les résultats de comparaison avec les séries alternées :

Ex: $U_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ $\quad V_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{n}$. $\quad U_n \underset{+\infty}{\sim} V_n$ mais ΣU_n CV et ΣV_n DV

3) $\ln\Big(1+\underbrace{\frac{(-1)^n}{n^a}}_{\substack{U \to 0 \\ +\infty}}\Big) \xrightarrow[\text{DL de } \ln(1+\alpha)]{} \frac{(-1)^n}{n^\alpha} - \frac{1}{2}\times\frac{(-1)^{2n}}{n^{2a}} + o\left(\frac{1}{n^{2a}}\right)$.

$= U - \frac{1}{2}U^2 + o(U^2)$

$= \underbrace{\frac{(-1)^n}{n^a}}_{V_n} \underbrace{- \frac{1}{2}\times\frac{1}{n^{2a}} + o\left(\frac{1}{n^{2a}}\right)}_{W_n}$.

4) $\Sigma V_n = \Sigma \frac{(-1)^n}{n^a}$ est CV $(a > 0)$

$W_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{-1}{2n^{2a}}$ donc par comparaison des séries à termes négatifs

ΣW_n et $\Sigma \frac{-1}{2n^{2a}}$ ont la m̂ nature

$\Sigma \frac{-1}{2n^{2a}} = \frac{-1}{2}\Sigma\frac{1}{n^{2a}}$ est une série de Rieman qui CV si $a > \frac{1}{2}$

DV si $a \leq \frac{1}{2}$.

Conclusion:

Si $a \leq \frac{1}{2}$, ΣU_n DV comme somme d'une série convergente et d'une série divergente.

Si $a > \frac{1}{2}$, ΣU_n CV car c'est la somme de deux séries convergentes.

Exercice n°7: 1) $\ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right) = \ln\left[\frac{\cancel{n}(1+\frac{1}{n})}{\cancel{n}(1-\frac{1}{n})}\right] = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln\left(1-\frac{1}{n}\right)$.

Exercice n°3 + série alternées. Formule cours.

$= \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right] - \left[-\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right]$.

$= \frac{2}{n} + \frac{2}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) = \frac{2}{n}\left(1 + \frac{1}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$

2) $U_n = (-1)^n n^\alpha \left[\frac{2}{n}\left(1 + \frac{1}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right]^\beta$

$= (-1)^n n^\alpha \times \frac{2^\beta}{n^\beta}\left[1 + \frac{1}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]^\beta$

$= (-1)^n \times \frac{2^\beta}{n^{\beta-\alpha}}\left(1 + \frac{\beta}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$

3) si $\beta \leq \alpha$ alors $U_n \not\to 0$
$|U_n| \to 2^\beta$ si $\beta = \alpha$
$|U_n| \to +\infty$ si $\beta < \alpha$.

Dans tous les cas (U_n) n'a pas de limite donc $\sum U_n$ DV (critère nécessaire de CV)

4) On note $(\beta > \alpha)$.

$$U_n = V_n + W_n \cdot \begin{cases} W_n = (-1)^n \times \dfrac{2^\beta}{n^{\beta-\alpha}} \times 1 \\ V_n = (-1)^n \dfrac{}{} \times \dfrac{2^\beta}{n^{\beta-\alpha}} \left(\dfrac{\beta}{3n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right) \end{cases}$$

c) $\sum (-1)^n \dfrac{2^\beta}{n^{\beta-\alpha}} = 2^\beta \sum \dfrac{(-1)^n}{n^{\beta-\alpha}}$ est une série de Riemann alternée

avec $\beta - \alpha > 0$, elle est convergente.

b) $|V_n| \underset{+\infty}{\sim} \left| \dfrac{(-1)^n 2^\beta}{\beta - \alpha} \times \dfrac{\beta}{3n^2} \right| \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2^\beta |\beta|}{3 n^{2+\beta-\alpha}}$ Cste k

$2 + \beta - \alpha > 2 > 1$ donc la série de Riemann $\sum \dfrac{k}{n^{2+\beta-\alpha}}$ est CV.
Par comparaison de série à termes positifs $\sum |V_n|$ CV.

$\sum V_n$ est absolum- CV donc CV.

d) CCL : $\sum U_n$ CV comme somme de deux séries convergentes.

Exercice n°8 : Séries de Bertrand :

$\sum \dfrac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}$ CV ssi $\begin{cases} \alpha > 1 \\ \text{ou} \\ \alpha = 1 \text{ et } \beta > 1. \end{cases}$

1er cas : $\alpha < 1$:

$$\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}} = \frac{n^\alpha \ln^\beta(n)}{n} = n^{\alpha-1} \ln^\beta(n).$$

$n^{\alpha-1} \underset{+\infty}{\to} 0$
si $\beta < 0$ $\ln^\beta(n) \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$
si $\beta = 0$: $\ln^\beta(n) = 1 \underset{+\infty}{\longrightarrow} 1$

si $\beta > 0$:
$\ln^\beta(n) \underset{+\infty}{\longrightarrow} +\infty$

Mais par croissance comparée :

$\ln^\beta(n) = o(n^{1-\alpha})$ cad $\ln^\beta(n) n^{\alpha-1} \xrightarrow[+\infty]{} 0$

CCL : Dans tous les cas :

$$\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}} \xrightarrow[+\infty]{} 0 \quad \text{donc } \frac{1}{n} = o\left(\frac{n}{n^\alpha \ln^\beta(n)}\right)$$

Or $\Sigma \frac{1}{n}$ DV, donc par comparaison de série à termes positif.

$\Sigma \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}$ DV

2^e cas : $\alpha > 1$

$1 < \frac{1+\alpha}{2} < \alpha$.

On compare $\frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}$ avec $\frac{1}{n^{\frac{\alpha+1}{2}} \ln^\beta(n)}$

Rq : $\Sigma \frac{1}{n^{\underbrace{\frac{1+\alpha}{2}}_{<1}} + \ln^\beta(n)}$.

$$\frac{\frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}}{\frac{1}{n^{\frac{\alpha+1}{2}}}} = \frac{n^{\frac{\alpha+1}{2}}}{n^\alpha \ln^\beta(n)} = n^{\frac{\alpha-1}{2}} \ln^{-\beta}(n)$$

<0

$n^{\frac{1-\alpha}{2}} \xrightarrow[+\infty]{} 0 \quad \begin{cases} \text{si } \beta > 0, \ln^{-\beta}(n) \to 0 \\ \text{si } \beta = 0, \ln^{-\beta}(n) \to 1 \\ \text{si } \beta < 0, \ln^{-\beta}(n) \to +\infty. \end{cases}$

mais $\ln^{-\beta}(n) = o\left(n^{\frac{\alpha-1}{2}}\right)$.

Dans tous les cas : $\frac{\frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}}{\frac{1}{n^{\frac{\alpha+1}{2}}}} \longrightarrow 0$ donc $\frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)} = o\left(\frac{1}{n^{\frac{1+\alpha}{2}}}\right)$.

Or $\Sigma \frac{1}{n^{\frac{1+\alpha}{2}}}$ CV donc par comparaison de série à termes positifs

$\Sigma \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}$ CV Rq : ces deux cas utilisent la "règle de Riemann"

-

3^e cas : $\alpha = 1$:

On utilise le lemme de condensation de Cauchy : Si (u_n) est decroissante alors $\sum U_n$ et $\sum 2^n u_{2^n}$ ont la même valeur.

Il faut montrer la suite $\frac{1}{n \ln^\beta(n)}$ est décroissante.

Rq : C'est evident (sans calcul) si $\beta \geq 0$.

Pour cela, on étudie les variations de la fonction :

$$f : [2 ; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{1}{x \ln^\beta(x)}$$

$$f'(x) = -\frac{\ln^\beta(x) + x\beta \frac{1}{x} \ln^{\beta-1}(x)}{[x \ln^\beta(x)]^2}$$

$$= -\frac{\overbrace{\ln^{\beta-1}(x)}^{>0} [\ln(x) + \beta]}{\underbrace{(x \ln^\beta(x))^2}_{>0}}$$

$\ln(x) + \beta > 0$

$\Leftrightarrow \ln(x) > -\beta$

$\Leftrightarrow x > e^{-\beta}$

CCL : Sur $[\mathrm{Max}(2, e^{-\beta}) ; +\infty[$. f' est negative donc f est decroissante.

en conclusion la suite $\left(\frac{1}{n \ln^\beta(n)}\right)$ est décroissante à partir d'un certain rang, on peut appliquer le lemme de condensation.

$$\sum 2^n U_{2^n} = \sum 2^n \frac{1}{2^n \ln^\beta(2^n)} = \sum \frac{1}{\ln^\beta(2^n)} = \sum \frac{1}{[n \ln(2)]^\beta}$$

$= \sum \underbrace{\frac{1}{\ln^\beta(2)}}_{\text{cste } K} \times \frac{1}{n^\beta} = \sum \frac{K}{n^\beta}$ C'est une série de Riemann qui converge ssi $\beta > 1$.

Par comparaison, $\sum \frac{1}{n \ln^\beta(n)}$ CV $\Leftrightarrow \beta > 1$.

$\ln^\beta = o\left(n^{\frac{\alpha-1}{2}}\right)$.

$\Leftrightarrow \frac{\ln^\beta(n)}{n^{\frac{\alpha-1}{2}}} \longrightarrow 0 \Leftrightarrow n^{\frac{1-\alpha}{2}} \ln^\beta(n) \longrightarrow 0$.

$\forall k > 0 \quad p \in \mathbb{R}$ $\qquad$ $\forall k \in \mathbb{R}$

$\ln^p(x) = o(n^k)$. $\qquad$ $n^k = o(e^n)$.

2) $\alpha < 0$: $n^\alpha \xrightarrow[+\infty]{} 0$ $\qquad \ln(1+u) = u + o(u) \sim u$

$\ln(1+\underbrace{n^\alpha}_{\to 0}) \underset{+\infty}{\sim} n^\alpha$

$U_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{n^\alpha}{n^\beta} = \underbrace{\dfrac{1}{n^{\beta-\alpha}}}$

$\sum \dfrac{1}{n^{\beta-\alpha}}$ Serie de Riemann qui converge ssi $\beta - \alpha > 1$.

Par comparaison de série à termes positifs :
$\sum U_n$ CV si $\beta - \alpha > 1 \iff \beta \geqslant 1 + \alpha$.

3) $\alpha > 0$ $\quad n^\alpha \to +\infty$.
$\ln(n^\alpha + 1) = \ln\left(n^\alpha\left(1 + \dfrac{1}{n^\alpha}\right)\right) = \underbrace{\ln(n^\alpha)}_{\to +\infty} + \underbrace{\ln\left(1 + \dfrac{1}{n^\alpha}\right)}_{\to 0}$ *

4) $\alpha = 0$: $n^\alpha = 1$
$\ln(1+n^\alpha) = \ln(2)$ $\quad U_n = \dfrac{\ln(2)}{n^\beta}$

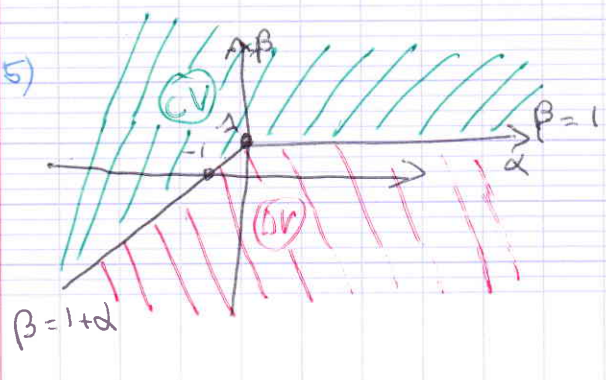
$\sum U_n$ est une série de Riemann qui converge ssi $\beta > 1$.

* : Suite question 3 :
Donc $\ln(1+n^\alpha) \underset{+\infty}{\sim} \ln(n^\alpha) = \alpha \ln(n)$
$U_n = \alpha \dfrac{\ln(n)}{n^\beta}$
$\dfrac{\ln(n)}{n^\beta} = \dfrac{1}{n^a \ln^b(n)}$ avec $a = \beta$ et $b = -1$

D'après Q1 : $\sum \dfrac{\ln(n)}{n^\beta}$ CV $\iff \beta > 1$

Par comparaison $\sum U_n$ CV $\iff \beta > 1$

5)



Exercice n°10 Règles d'Abdel :

- (U_n) une suite décroissante qui tend vers 0.
- (v_n) telle que $\left(\sum_{k=0}^{n} V_k\right)$ est bornée [(V_n) pas forcement CV].

Alors $\sum U_n V_n$ converge.

1) Lemme de pompage

$\sum_{k=0}^{n-1} (V_k - U_{k-1}) = U_0 - U_n$. $\sum (U_n - U_{n+1})$ CV (série).

$\Leftrightarrow (U_n)$ CV (suite).

2) $\sum_{k=0}^{n} (U_k - U_{k-1}) V_k + U_{n+1} V_n = \sum_{k=0}^{n} U_k V_k - \sum_{k=0}^{n} U_{k+1} V_k + U_{n+1} V_n$

$= \sum_{k=0}^{n} U_k V_k - \sum_{\underbrace{k'=1}_{k+1=k'}}^{n+1} U_{k'} V_{k'-1} + U_{n+1} V_n = U_0 \underbrace{V_0}_{V_0=v_0} + \sum_{k=1}^{n} U_k \underbrace{(V_k - V_{k-1})}_{v_k}$

$- U_{n+1} \cancel{V_n} + U_{n+1} \cancel{V_n}$

$= U_0 v_0 + \sum_{k=1}^{n} U_k v_k = \sum_{k=0}^{n} U_k v_k$

3) (V_n) est bornée :

$\exists M, \forall n : |V_n| \leqslant M$. $U_{n+1} \xrightarrow[+\infty]{} 0$ donc $U_{n+1} V_n \xrightarrow[+\infty]{} 0$

$\sum_{k=0}^{n} |(U_k - U_{k+1}) V_k| = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{|U_k - U_{k-1}|}_{U_n \geqslant U_{n+1}} \cdot \underbrace{|V_k|}_{\leqslant M} \leqslant M \cdot \sum_{k=0}^{n} (U_k - U_{k+1}) \rightarrow$ majoré

$\sum_{k=0}^{n} |(U_k - U_{k+1}) V_k|$ est une série positive dont la somme est majorée donc elle converge

CCL :

$\sum (U_n - U_{n+1}) V_n$ est ACV donc CV. D'où $\sum U_n V_n$ CV.