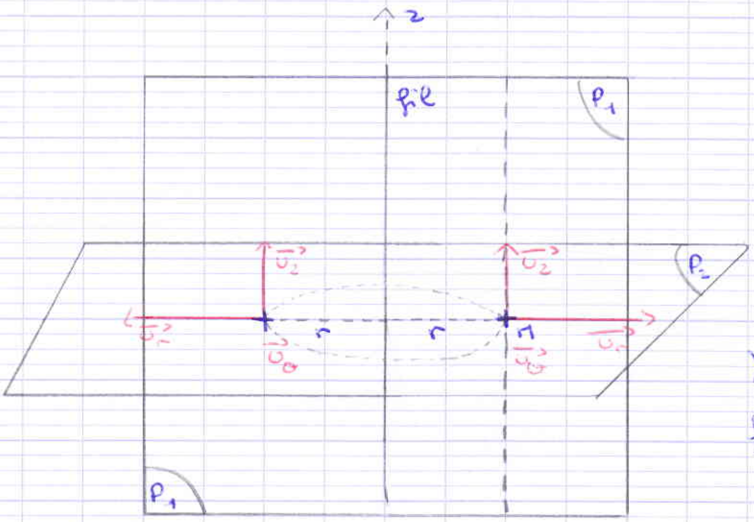
1|

Ph
TD4

Théorème de Gauss

Exercice 1

1.



(r, θ, z)
$(\vec{u_r}, \vec{u_\theta}, \vec{u_z})$

" $\vec{E}(M) \in \cap P_{sym}$ " passant par M "

λ cste
fil infini } => P_2 est un 2ème plan de symétrie

$\vec{E}\begin{pmatrix} E_r \\ E_\theta = 0 \\ E_z = 0 \end{pmatrix}$ à cause de P_1 / à cause de P_2

Connaître la direct° de dS.

$\vec{E}$ est donc radical $\vec{E} = E_r \vec{u_r}$

$\not\Rightarrow$ $\vec{E} = E_r(r)\vec{u_r}$

Invariantes : => savoir sur quoi intégré

$E_r(r, \cancel{\theta}, \cancel{z})$

· fil infini => le fil est invariant par translat° sur $\vec{Oz}$
=> pas de z dans E_r

· λ cste => le fil est invariant par ~~tra~~ rotat° d'angle θ
=> pas de θ dans E_r

E_r => direct° du vecteur
(r) => variante

$\vec{E} = E_r(r)\vec{u_r}$

2. Calcul de E(r)

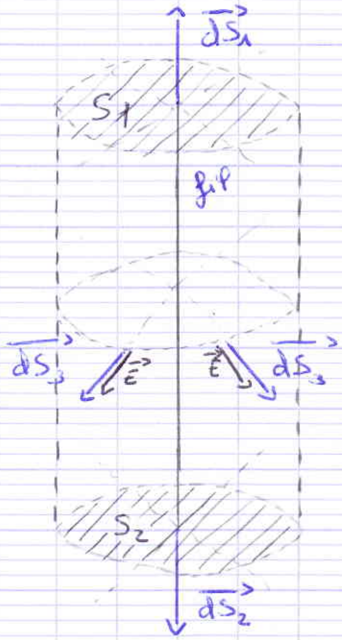
$\underbrace{\oiint_{Sg} \vec{E}\cdot\vec{dS}}_{\Phi(\vec{E})} = \dfrac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$

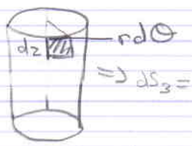
Sg : cylindre de rayon de r, de longueur L et passant par M

$Sg = S_1 + S_2 + S_3$
$S_1 + S_2$: de base ; S_3 : latérale

Les lignes de champ étant radiales, elles ne traversent que la surface latérale.

$\vec{dS}$: $\perp$ à la surface dirigé vers l'extérieur





$\Rightarrow dS_3 = dz \times r d\Theta$

$\vec{E} = E_r(r)\vec{u_r}$
$\Rightarrow E = E_r(r)$

$\Phi_{s_3}(\vec{E}) = \Phi_{s_3}(\vec{E}) = \iint_S E\, dS_3 \cos(0°)$

(car $\Phi_{s_1} = \Phi_{s_2} = 0$, $E \perp \vec{dS_1}$, $\vec{E} \perp \vec{dS_2}$)

Donc $\Phi_{s_3} = \int_0^L \int_0^{2\pi} E(r) \times r\, d\Theta\, dz$

$= E(r) \times r \int_0^L dz \int_0^{2\pi} d\Theta$

$= E(r) \times r \times [z]_0^L \times [\Theta]_0^{2\pi}$

$= E(r) \times r \times 2\pi L$

Calcul de Q_{int}

$Q_{int} = Q_{fil}$

$= \int_0^L \lambda\, dl$

$= \int_0^L \lambda\, dz$

$= \lambda \times L$

2)

Ph
TD4

On remplace dans le th. : $E \times 2\pi r \times L = \frac{\lambda L}{\varepsilon_0}$

$$\Rightarrow E(r) = \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0 r}$$

$E = \frac{2k\lambda}{x}$ (méthode exo 2 du TD3)

$x = r$, $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ $\Rightarrow E = 2 \times \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \times \frac{\lambda}{r}$

$$= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

Exercice 2

Champ extérieur nulle $Q_1 = |Q_2|$
La répartition des charges est uniforme (σ = cste)
densité ≠

1. Voir schéma exo 1 (1)

Règle de symétrie :

* σ = cste (répartit° uniforme de charges)
* P_{cyl} infini ($P \gg OM$)

σ = cste : P_1 : 1er plan de sym. $(\vec{u_r}, \vec{u_z})$

$$\vec{E} \in P_1 \Rightarrow \vec{E} \begin{pmatrix} E_r \\ E_\theta = 0 \\ E_z \end{pmatrix}$$

P infini : P_2 : 2ème plan de sym.

$$\Rightarrow E_z = 0 \Rightarrow \vec{E} = \begin{pmatrix} E_r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Conclusion : $\vec{E}$ est radial, $\vec{E} = E_r \vec{u_r}$

Invariances :

(r, θ, z)

ℓ : infini => les cylindres sont invariants par translat° sur $\vec{Oz}$

=> E_r ne dépend pas de z

σ = cste => les cylindres sont invariants par rotation de θ

=> E ne dépend pas de θ.

=> $E = E_r(r)\,\vec{u_r}$

2. Calcule de E par le th. de Gauss :

$$\underbrace{\oiint_{S_g} \vec{E} \cdot \vec{dS}}_{\Phi(\vec{E})} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

S_g = cylindre de rayon r

$S_g = \underbrace{S_1 + S_2}_{2\text{ surface de base}} + \underbrace{S_3}_{S_{\text{latéral}}}$

Les lignes étant radiales, elles ne traverseront que la surfaces latéral S_3 car $\vec{E} \perp S_1$, $\vec{E} \perp S_2$ => = 0

=> $\Phi_{S_g}(\vec{E}) = \Phi_{S_3}(\vec{E}) = \iint_{S_3} \vec{E} \cdot \vec{dS_3}$ voir exo 1 si nécessaire

$$\Phi_{S_g}(\vec{E}) = \iint_{S_3} E(r) \times r\,d\theta\,dz$$

$$= E(r) \times r \times \int_0^{2\pi} d\theta \times \int_0^L dz$$

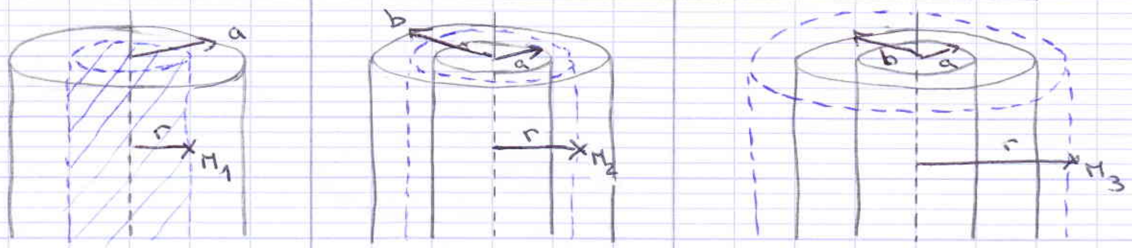
$$= E(r) \times r \times 2\pi \times L.$$

Calcul de Q_{int}

$$Q_{int} = Q_{fil} = \int_0^L \lambda\, d\ell = \int_0^L \lambda\, dz = \lambda L$$

On remplace dans le th. : $E \times 2\pi \times r \times L = \dfrac{\lambda L}{\varepsilon_0}$

Ph
TD4



$r<a$	$a<r<b$	$r>b$
$Q_{int} = 0$ (car pas de charge dans ⦙) $\Rightarrow E = 0$	$Q_{int} = +Q$ $\Rightarrow E(r) = \dfrac{Q_{int}}{2\pi L \varepsilon_0 r} = \dfrac{Q}{2\pi L \varepsilon_0 r}$ cste	$Q_{int} = +Q - Q = 0$ (autant de charges ⊕ que ⊖) $\Rightarrow E = 0$

3. Calculs de la fonction potentiel $V(r)$:

On utilise $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}(V)$

$$\text{grad}_{cyl} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} E_r = -\dfrac{\partial V}{\partial r} = -\dfrac{dV}{dr} \\ E_\theta = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V}{\partial \theta} = 0 \\ E_z = -\dfrac{\partial V}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

$$E_r = -\frac{dV}{dr} \iff dV = -E_r\,dr$$
$$\iff V(r) = -\int E_r\,dr$$

Donc pour $r<a$: $V(r) = -\int 0\,dr = C_1$

pour $a<r<b$: $V(r) = -\dfrac{Q}{2\pi L\varepsilon_0}\ln(r) + C_2$

pour $r>b$: $V(r) = C_3$

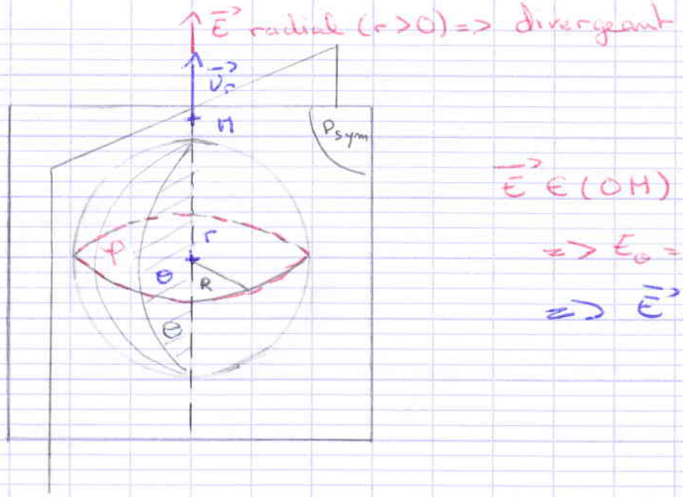
4. $C = \dfrac{Q}{V_a - V_b}$

$$C = \frac{Q}{-\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L}\ln(a) + C_2 + \frac{Q}{2\pi L\varepsilon_0}\ln(b) - C_2} = \frac{1}{-\frac{\ln(a)+C_2}{2\pi L\varepsilon_0} + \frac{\ln(b)-C_2}{2\pi L\varepsilon_0}}$$

$$= \frac{2\pi L\varepsilon_0}{\ln(b)-\ln(a)}$$

$$= \frac{2\pi L\varepsilon_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

Exercice 3



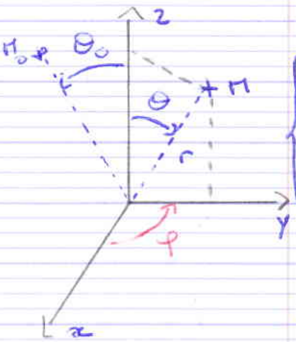
$\vec{E} \in (OM)$, $\vec{E}$ radial

$\Rightarrow E_\theta = 0$ et $E_\varphi = 0$

$\Rightarrow \vec{E} = E_r \vec{u_r}$

1. (r, θ, φ)

$\sigma = cste \Rightarrow \exists$ infini de P_{sym} passant par M qui coupent la sphère en 2 demi-sphères portant la m̂ charge.



$$\begin{cases} r = OM \\ \theta = (\vec{Oz}, \vec{OM}) \quad \theta \in \text{demi-disque vertical} \Rightarrow 0 \leq \theta \leq \pi \\ \varphi = (\vec{Ox}, \vec{OM}) \quad \varphi \in \text{disque du plan } (xOy) \Rightarrow 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}$$

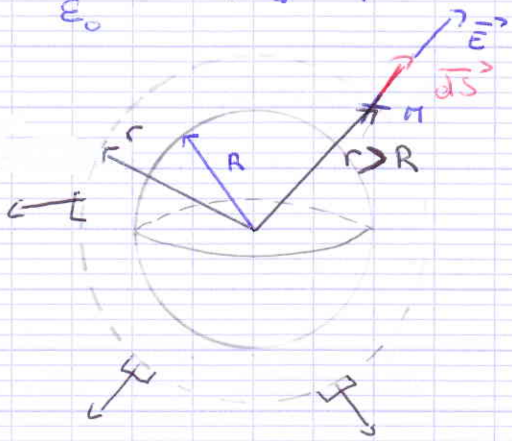
Invariance :

$\sigma = cste \Rightarrow$ la sphère est invariante par rotation d'angle θ (autour de $\vec{Ox}$) et angle φ (autour de $\vec{Oz}$)

$$\Rightarrow \vec{E} = E(r)\,\vec{u_r} \quad \left(\frac{\partial E_r}{\partial \theta} = 0, \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} = 0 \right)$$

2. Calcule de E par le th. de Gauss.

$$\underbrace{\oiint_{S_g} \vec{E} \cdot \vec{dS}}_{\Phi(\vec{E})} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \qquad (S_g = \text{sphère de rayon } r)$$



Ph
TD4

$$\Phi(\vec{E}) = \oiint_{S_g} E(r) \times \underbrace{dS}_{g(\theta,\varphi)} \times \cos(0°)$$

$$= E(r) \times \underbrace{\oiint_{S_g} dS}_{= S_g}$$

$$= E(r) \times S_{gauss}$$

$$= E \times 4\pi r^2$$

Calcul de Q_{int}

$r < R$	$r > R$
$Q_{int} = 0$ $\vec{E} = 0$	$Q_{int} = Q_{sphère}$ de rayon R $= \oiint_S \sigma\, dS$ $= \sigma \times \oiint dS$ car $\sigma = cste$ $= \sigma \times 4\pi R^2$ $E(r) \times \cancel{4\pi} r^2 = \frac{\sigma R^2 \cancel{4\pi}}{\varepsilon_0} \iff E(r) = \frac{\sigma \cdot R^2}{\varepsilon_0 r^2}$ = cste