EPITA / S_3 Octobre 2018

NOM : .... PRENOM : .... GROUPE : ....

Contrôle 1 de Physique

Corrigé

Les calculatrices et les documents ne sont pas autorisés.

Réponses exclusivement sur le sujet

On rappelle que, sauf si mentionné explicitement dans le sujet, la notation $E_A(M)$ correspond à la **norme** du champ $\overrightarrow{E_A}(M)$. Par contre, les angles utilisés sont des angles **orientés**.

On utilisera par la suite la constante $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$.

QCM ***(4 points-pas de points négatifs)*** ***Entourer la bonne réponse.***

0.5 pt / réponse.

1- Le champ électrique, créé par une charge ponctuelle q placée au point O, en un point M s'écrit comme :

a) $\vec{E}(M) = k\frac{q}{OM^2}\overrightarrow{OM}$ b) $\vec{E}(M) = k\frac{q}{OM^3}\overrightarrow{OM}$ c) $\vec{E}(M) = k\frac{q}{OM}\overrightarrow{OM}$

2- On s'intéresse à la force électrostatique $\vec{F}_{1\to2}$ qu'une charge q_1 située en A exerce sur une charge q_2 située en B. La norme de cette force est donnée par :

a) $F_{1\to2} = k\frac{q_1q_2}{AB}$ b) $F_{1\to2} = k\frac{|q_1||q_2|}{AB}$ c) $F_{1\to2} = k\frac{|q_1||q_2|}{AB^2}$

3- La force électrostatique est une force :

a) Toujours attractive b) Toujours répulsive c) Toujours conservative

4- Quelle propriété vérifie le champ électrostatique $\vec{E}$ associé au potentiel V ?

a) $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V)$ b) $\vec{E} = \overrightarrow{grad}(V)$ c) $V = \overrightarrow{grad}(\vec{E})$

5- On considère une distribution surfacique de charge σ. Un élément infinitésimal de surface dS situé dans un voisinage de P crée en un point M, où se trouve une charge q, une force élémentaire $\overrightarrow{dF}$ d'expression :

a) $\overrightarrow{dF} = kq\frac{\sigma dS}{PM}\overrightarrow{PM}$ b) $\overrightarrow{dF} = kq\frac{\sigma dS}{PM^3}\overrightarrow{PM}$ c) $\overrightarrow{dF} = kq\frac{\sigma dS}{PM^2}\overrightarrow{PM}$

6- On considère une distribution surfacique de charge σ positive répartie de façon uniforme sur un cylindre d'axe (Oz), de rayon R et de hauteur h. Quel élément infinitésimal de surface dS n'est pas pertinent dans cette géométrie ?

a) $dS = rdrd\theta$ b) $dS = dxdy$ c) $dS = rd\theta dz$

7- On regarde le cas limite d'un cylindre infini d'axe (Oz) (de vecteur unitaire $\overrightarrow{u_z}$) et chargé positivement en surface et uniformément. On s'intéresse au champ électrique $\vec{E}(M)$, où M est situé sur l'axe (Oz). Que peut-on dire ?

a) $\vec{E}(M) = \vec{0}$ b) $\vec{E}(M).\overrightarrow{u_z} > 0$ c) $\vec{E}(M)$ est divergent.

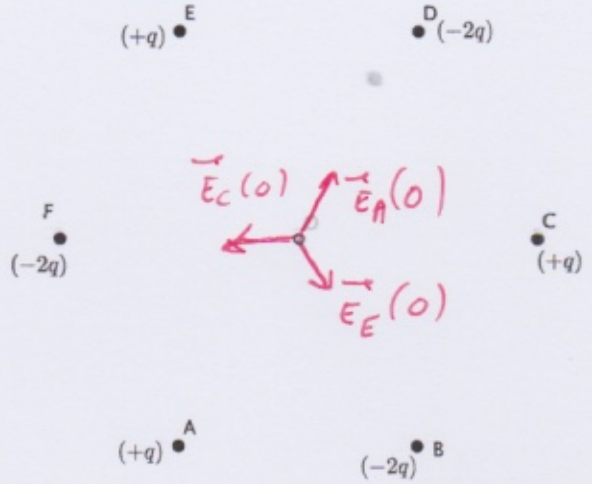
8- De nouveau avec le cylindre fini de la question 6, en un point M extérieur au cylindre les composantes cylindriques (E_ρ, E_θ, E_z) du champ électrostatique vérifie :

a) $E_\rho = 0$ b) $E_\theta = 0$ c) $E_z = 0$

Exercice 1

6 pts

On étudie la distribution de charges suivantes ($q > 0$), formant un hexagone régulier de côté a et de centre O.



1- a) Exprimer les champs électrostatiques $\vec{E}_A(O)$, $\vec{E}_C(O)$, $\vec{E}_E(O)$ créés en O par les charges respectivement en A, C et E. Les représenter sur la figure ci-dessus. / 0.5 pt

$\vec{E}_A(O) = k \frac{q}{a^3} \vec{AO}$; $\vec{E}_C(O) = k \frac{q}{a^3} \vec{CO}$

$\vec{E}_E(O) = k \frac{q}{a^3} \vec{EO}$ 0.5 pt

b) Calculer la norme du champ électrostatique total généré par ces trois charges au point O.

2 pts

$\vec{E}_{tot} = \vec{E}_C + \vec{E}_A + \vec{E}_E$

1ère méthode :

D'où $\|\vec{E}_{tot}\|^2 = 3\left[E_A^2 + 2 E_A^2 \cos(\vec{E}_A, \vec{E}_C)\right]$

$= 3 E_A^2 \left[1 + 2\cos(2\pi/3)\right] = 0$

$\Rightarrow E_{tot} = 0$

2ème méthode : projection sur des axes (Ox, Oy).
3ème méthode : O est le barycentre de ACE
$\rightarrow \vec{E}_{tot} = \vec{0}$

Il s'agit surtout dans cette question de vérifier s'ils n'écrivent pas $E_{tot} = (\sum E_i^2)^{1/2}$ sans réfléchir ... } selon la méthode adoptée, répartir les pts selon le niveau de rédaction

2- a) On place une charge $Q < 0$ au point O. Après avoir représenté la force générée par les charges en A, C et E sur la charge Q, exprimer la norme de cette force.

On sait que $\vec{E}_{tot} = \vec{0}$ d'où $\vec{F}_{tot} = Q\vec{E}_{tot} = \vec{0}$. 1pt

b) Exprimer le potentiel électrostatique $V(O)$ créé en O par les charges placées en B, D et F.

$V(O) = 3\, V_B(O) = 3 \cdot \left(k \dfrac{-2q}{a}\right) = -6kq/a$ 1pt

c) En prenant en compte toutes les charges placées aux sommets de l'hexagone, donner l'expression de l'énergie potentielle électrostatique $\mathcal{E}$ de la charge Q placée en O.

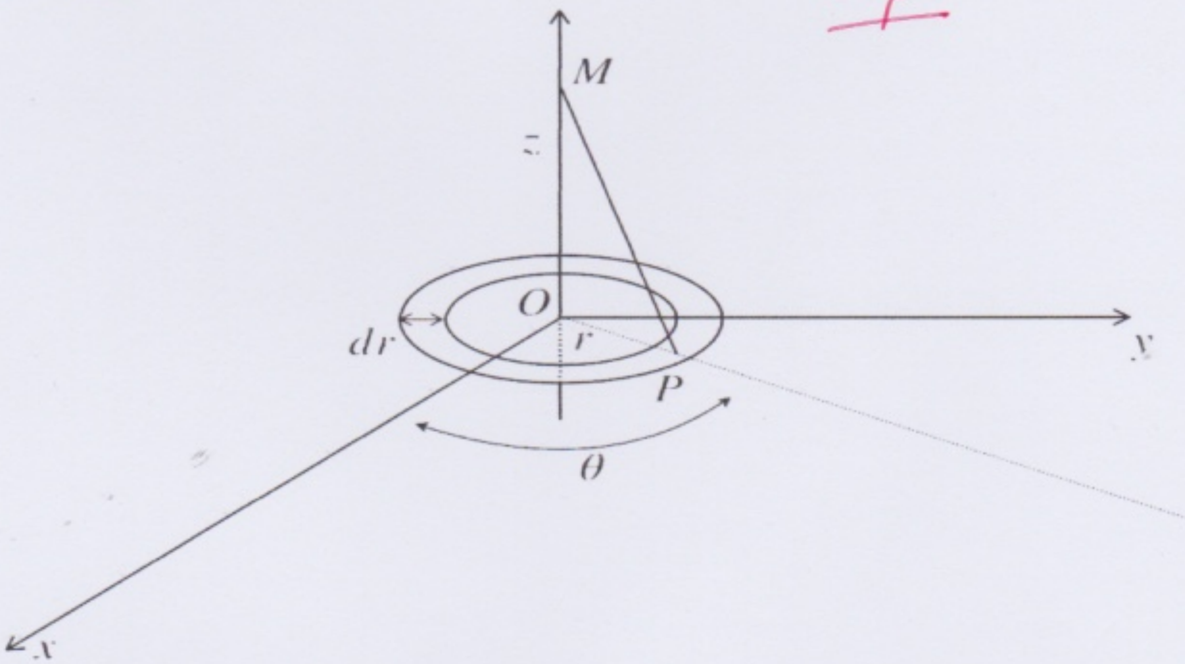
$$V_{tt} = 3\left(k\frac{q}{a} + k\frac{-2q}{a}\right) = -3kq/a$$

1pt

$$\text{et } \mathcal{E} = QV_{tt} = -3k\frac{qQ}{a}$$

Exercice 2

6 pts



On considère une distribution surfacique de charges σ uniformément répartie sur une couronne de rayon r, de largeur dr et de centre O. Le point M est sur l'axe (Oz).

1- Donner l'expression du champ électrostatique élémentaire $d\overrightarrow{E_P}(M)$ créé en M par une charge élémentaire surfacique dQ de centre P.

$$d\vec{E}_P(M) = k\frac{dQ}{PM^3}\overrightarrow{PM} = k\frac{\sigma . r dr d\theta}{PM^3}\overrightarrow{PM}$$

1pt

Remarque : étant donné que $dQ \sim dr\, d\theta$, il aurait fallu écrire $d^2\vec{E}_p = \dots$, mais je préfère ne pas les embêter avec ces notations sur les grandeurs différentielles.

2- En déduire le champ électrostatique total créé par cet anneau en M. Vous détaillerez votre raisonnement.

/ 1 pt sur le détail si possible...

Tout plan contenant l'axe (Oz) est un plan de symétrie donc $\vec{E}_{ann}(M)$ appartient à l'intersection, i.e est selon (Oz). Donc pour l'anneau,

$E_z(M) = \vec{E}_{ann}\cdot\vec{u_z}$ et il suffit de projeter $d\vec{E}_p(M)$ sur $\vec{u_z}$, soit : $dE_{p,z}(M) = k\frac{dQ}{PM^3}\cdot z$

et $E_z(M) = \int_0^{2\pi} k\frac{\sigma\, r\, dr\, d\theta}{(r^2+z^2)^{3/2}}\cdot z$

$= 2\pi k\sigma z\frac{r\,dr}{(r^2+z^2)^{3/2}}$ et donc $\vec{E}_{ann}(M)$.

/ 1 pt

3- On souhaite déterminer le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ créé en M par un disque de rayon R, de centre O et d'axe (Oz).

En utilisant la question 2, retrouver l'expression de $\vec{E}(M) = 2\pi k\sigma z\left(\frac{1}{|z|} - \frac{1}{\sqrt{(R^2+z^2)}}\right).\vec{u_z}$ puis sa norme.

Pour le disque $\mathcal{D}(O,R)$, on étend l'intégration sur $[0,R]$:

$E_{\mathcal{D}(O,R)}(M) = \int_0^R E_z(M) = 2\pi k\sigma z\left[-\frac{1}{(r^2+z^2)^{1/2}}\right]_0^R$

$= 2\pi k\sigma z\left[\frac{1}{|z|} - \frac{1}{(R^2+z^2)^{1/2}}\right].$

/ 1 pt

$$\forall z, \quad \frac{1}{|z|} - \frac{1}{(R^2+z^2)^{1/2}} \geq 0$$

et donc $\|\vec{E}_{\mathcal{D}}\| = 2\pi k |\sigma| \left(1 - \frac{|z|}{(R^2+z^2)^{1/2}}\right)$

1pt

4- En utilisant les symétries de la distribution de charges, commenter la limite $R \to \infty$ (plan infini).

Lorsque $R \to +\infty$, $E_{\mathcal{D}}(M) \to 2\pi k \sigma \frac{z}{|z|}$

$$= \mathrm{sign}(z) \cdot \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}.$$

1pt

i.e $\forall z > 0$, $\vec{E}(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{u}_z = \overrightarrow{cst}$

$\forall z < 0$, $\vec{E}(z) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{u}_z = \overrightarrow{cst}$

. Dans le cas du plan infini, tout plan $\perp$ à ce plan (disons (xOy)) contenant M est un plan de symétrie donc $\vec{E}(M) \parallel \vec{u}_z$. De plus on a invariance par x et y translations (plus invariance d'échelle ...) donc $\vec{E}(M) = \overrightarrow{cst}$ selon le demi-espace considéré.

$\Rightarrow$ cohérent. (à revoir avec le th. de Gauss).

Exercice 3

4 pts

Soit le potentiel électrostatique $V(x,y,z)$ donné en coordonnées cartésiennes par l'expression suivante $V(x,y,z) = k\frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

1- Exprimer le champ électrique $\vec{E}(x,y,z)$ dérivant de ce potentiel dans la base $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z})$.

On sait que $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V$

où $E_x = -\partial_x V = k\frac{q}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \cdot x$

et de même pour E_y et E_z.

Ainsi $\vec{E}(x,y,z) = k\frac{q}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\left(x\vec{u_x} + y\vec{u_y} + z\vec{u_z}\right)$

2 pts

2- Retrouver, à l'aide de la question 1, l'expression du vecteur unitaire radial $\overrightarrow{u_r}$ de la base sphérique. Vous pourrez utiliser l'expression du gradient suivante en sphérique, où $f(r)$ est une fonction uniquement de la coordonnée r : $\overrightarrow{grad}f = \frac{\partial f}{\partial r}\overrightarrow{u_r}$.

évident pour ceux qui ont compris le sens de $\overrightarrow{OM}$.

On remarque que $x\vec{u_x} + y\vec{u_y} + z\vec{u_z} = r\vec{u_r} = \overrightarrow{OM}$ en sphérique et donc

$$\vec{E}(r) = k\frac{q}{r^3}\cdot r\vec{u_r} = k\frac{q}{r^2}\vec{u_r}$$

Mais en parallèle, $V(r) = k\frac{q}{r}$ et avec la formule donnée du gradient en sphérique $\vec{E}(r) = -\frac{\partial V}{\partial r}\vec{u_r} = k\frac{q}{r^2}\vec{u_r}$,

ce qui redonne bien $\vec{u_r} = \frac{x\vec{u_x} + y\vec{u_y} + z\vec{u_z}}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}$.

2 pts