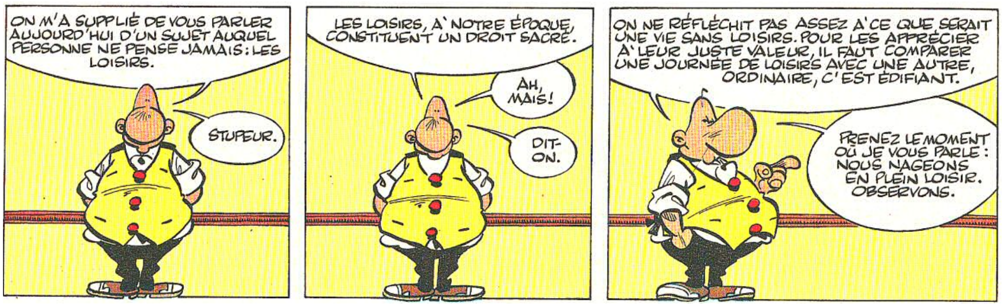
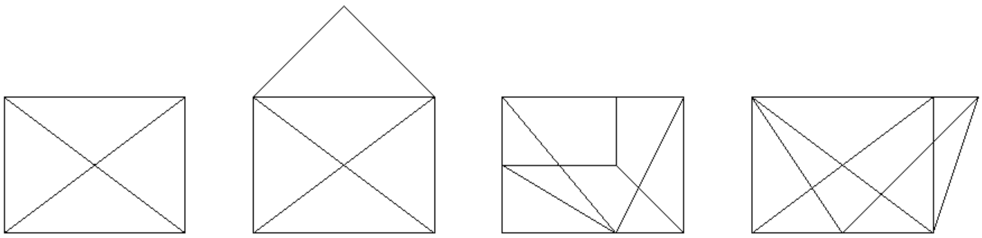
Des problèmes. . .

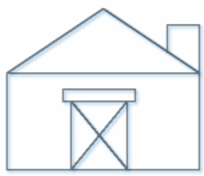


Les problèmes ci-dessous peuvent être résolus en utilisant les graphes. Quelques solutions sont, dans le désordre, dans la partie 2 (certaines solutions sont pour plusieurs problèmes). D'autres sont dans les td / exam (passés et futurs) !

Problème 1 (Sans lever le crayon)



Quelles sont parmi ces figures, celles que l'on peut dessiner sans lever une seule fois le crayon, sans repasser par un même trait ?



Problème 2 (Les chevaliers d'Arthur)

La légende dit que les chevaliers d'Arthur sont tous unis par une amitié sans faille. En réalité, tout n'est pas si rose à *Kaamelott*. Voici les "incompatibilités inter-personnelles" entre les chevaliers.

- Sagamor ne supporte ni Tristan ni Mordred ;
- de même pour Tristan avec Lancelot ou Perceval ;
- Lamorak et Yvain se méfient de Lancelot ;
- Perceval refuse de parler avec Yvain et Keu ;
- Keu et Lamorak détestent Mordred ;
- enfin, Yvain et Tristan ne se sont jamais entendus.

1. La Quête du Graal : Arthur veut envoyer des équipes de chevaliers à la recherche du Graal.
   (a) Proposer à Arthur une solution de 4 équipes de 2.
   (b) Arthur peut-il faire moins d'équipes ?
2. La table ronde : Arthur souhaite définir un plan de table permettant aux chevaliers de se réunir en dehors de sa présence et de passer une bonne soirée en ayant des personnes compatibles à leur gauche et à leur droite.
   (a) Proposer un plan de table à Arthur.
   (b) Pour donner l'image d'un manager moderne, Arthur propose une organisation à l'aide d'une table en forme de U où les chevaliers seront assis sur la partie extérieure du U. Proposer un nouveau plan de table.

Problème 3 (Le loup, le chou et la chèvre)

Une chèvre, un loup et un chou se trouvent sur la rive droite d'un fleuve. Un passeur veut leur faire traverser le fleuve, mais sa barque étant trop petite, il ne peut transporter qu'un seul d'entre eux à la fois. On ne peut laisser sans surveillance sur une berge le loup en compagnie de la chèvre ou la chèvre en compagnie du chou. Expliquez au passeur ce qu'il peut faire.

Problème 4 (Mangez des brownies)

Combien de temps pour faire des brownies ?
Ci-dessous la recette, avec pour chaque tâche sa durée.

Ref.	recette	durée (en mn.)
A	Faire fondre le chocolat et le beurre au bain-marie.	7
B	Dans un saladier mélanger l'huile, le sucre et les oeufs.	5
C	Casser les noix (ou autre garniture) en morceaux.	3
D	Tamiser la farine avec le sel.	1
E	Ajouter le chocolat (A) au mélange B, mélanger bien.	4
F	Y ajouter la farine (D) et les noix (C).	2
G	Beurrer, fariner le plat.	1
H	Préchauffer le four.	10
I	Mettre la préparation (F) dans le plat.	1
J	Enfourner.	35

1. **Le cuisinier est tout seul en cuisine :** la durée minimum est donc la somme des temps nécessaires à chaque tâche (il n'a pas compris qu'il pouvait faire autre chose pendant que le four chauffe. . .). Par contre, il faut l'aider à trouver l'ordre dans lequel il va pouvoir faire les différentes tâches. Comment obtenir tous les ordres possibles ?

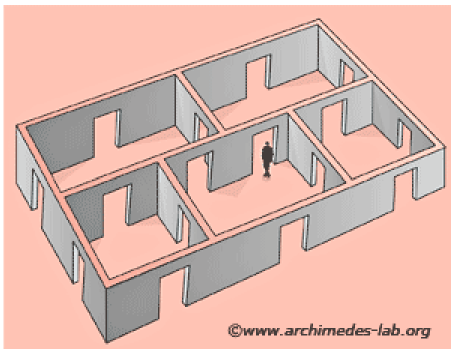
2. **Le cuisinier a trouvé des aides, les tâches peuvent donc être réalisées en parallèle :** Quel temps faudra-t'il au minimum pour pouvoir sortir le plat du four ?

Problème 5 ("Sculptures")

Combien faut-il de ballons pour réaliser cette sculpture ?

Problème 6 (Five room puzzle)

Est-il possible de trouver un chemin qui passe une seule fois par chacune des portes ?



Problème 7 (Attribution de fréquences radio)

Certains réseaux de télécommunication sont composés d'émetteurs émettant chacun sur une fréquence particulière. Lorsque deux émetteurs sont trop proches on ne peut leur allouer la même fréquence à cause des interférences.

Comment déterminer une allocation réalisable avec un minimum de fréquences ?

Problème 8 (Nim)

Trouver une stratégie pour gagner à cette version classique du jeu de Nim :

Au départ il y a n allumettes, chaque joueur prend à tour de rôle 1, 2 ou 3 allumettes, et le joueur qui prend la dernière allumette a perdu.

Et pour la version "inversée" ?

Cette fois-ci, celui qui gagne est celui qui enlève les dernières allumettes. De plus, on peut enlever jusqu'à 4 allumettes à chaque tour.

... et des graphes

Exercice 1 (Chemin)

1. Comment trouver un chemin (ou une chaîne) entre deux sommets donnés dans un graphe ? Donner deux méthodes différentes, les comparer.
2. Écrire une fonction qui cherche un chemin entre deux sommets. Si un chemin a été trouvé, il devra être retourné (une liste de sommets).

Exercice 2 (Euler)

Un graphe non orienté est dit eulérien si on peut parcourir une fois et une seule toutes ses arêtes : si on peut trouver une chaîne eulérienne passant par toutes ses arêtes ou un cycle eulérien (on doit revenir au point de départ).

1. **Test :**
   (a) Quelles sont les propriétés d'un graphe eulérien ?
   (b) En déduire une fonction qui détermine si un graphe est eulérien.
2. **Chaîne :**
   (a) Écrire une fonction qui vérifie si une liste de sommets peut être une chaîne Eulérienne d'un graphe.
   (b) Comment construie la chaîne (ou le cycle) Eulérien d'un graphe eulérien ?

Exercice 3 (Sous-graphe)

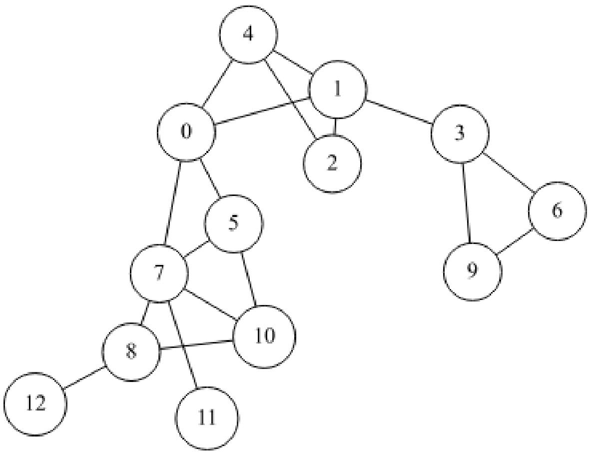


FIGURE 1 – Graphe G

1. Quels sont les sommets de G qui se trouvent à une distance maximale de 2 depuis le sommet 0 ?
2. Construire le sous-graphe issu de S', ensemble des sommets de la question 1.
3. Quel parcours peut nous permettre d'obtenir de tels sommets ?
4. Écrire une fonction qui construit, à partir d'un graphe (orienté ou non), un sous-graphe ne contenant que les sommets accessibles en un chemin (une chaîne) de longueur maximale donnée à partir d'un sommet source.

Exercice 4 (Algo)

Soit l' "algorithme" suivant, sur un graphe orienté :

Tant que le graphe n'est pas vide – choisir un sommet sans prédécesseur – supprimer ce sommet du graphe

1. Quelle propriété doit avoir le graphe pour que l'algorithme s'arrête ?
2. Comment implémenter cet algorithme sans réellement supprimer les sommets ?
3. Écrire la fonction qui retourne la liste des sommets dans l'ordre où ils sont choisis.

Exercice 5 (Coloration - Nombre chromatique)

En théorie des graphes, colorer un graphe signifie attribuer une couleur à chacun de ses sommets de manière à ce que deux sommets reliés par une arête soient de couleur différente. Est souvent recherchée l'utilisation d'un nombre minimal de couleurs, dit nombre chromatique.

1. Écrire une fonction qui à partir d'un graphe et d'une liste représentant pour chaque sommet sa couleur (un entier), vérifie si la coloration donnée est correcte.
2. Quel est la rapport entre le nombre chromatique d'un graphe simple et son degré maximum ?
3. Comment trouver le nombre chromatique d'un graphe ?

Exercice 6 (Noyau)

Soit un graphe orienté $G = <S, A>$.

- ☐ Un sous-ensemble S_1 de S est dit *stable* si tout sommet x de S_1 n'a aucun successeur (voisin) dans S_1. Les sommets du sous-ensemble stable sont donc deux à deux non adjacents (on parle aussi d'ensemble *indépendant*).
- ☐ Un sous-ensemble S_2 de S est dit *absorbant* (ou dominant) si tout sommet de S n'appartenant pas à S_2 possède au moins un successeur dans S_2.
- ☐ Un sous-ensemble de sommets est un *noyau* du graphe s'il est à la fois stable et absorbant.

1. Construire le graphe d'ordre 12 permettant de représenter le dernier problème (basique).
2. (a) Donner le noyau (il n'y en a qu'un ici) du graphe obtenu.
   (b) En quoi le noyau peut-il nous aider à trouver une solution ?
3. (a) Un graphe orienté sans circuit possède un et un seul noyau. Comment construire le noyau d'un tel graphe ?
   (b) Et si le graphe est quelconque ?