Corrigé du contrôle

Exercice 1 (4 points)

1. La fonction $t \longmapsto \dfrac{\sqrt{1+t}-1}{t^3}$ est continue sur $]0,1]$.

   Au voisinage de 0, $\sqrt{1+t}-1 = 1+\dfrac{1}{2}t+o(t)-1 \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{2}t$

   donc $\dfrac{\sqrt{1+t}-1}{t^3} \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{2t^2} > 0$.

   Or $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ diverge donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{1+t}-1}{t^3}\,\mathrm{d}t$ diverge.

2. La fonction $t \longmapsto \dfrac{e^{-t}}{1+t^2}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}_+$.

   $t^2\dfrac{e^{-t}}{1+t^2} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ donc $\dfrac{e^{-t}}{1+t^2} = o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.

   Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ converge donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ converge d'où $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

3. La fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{(1+t^2)\sqrt{t}}$ est continue et positive sur $]0,+\infty[$.

   On a $\dfrac{1}{(1+t^2)\sqrt{t}} \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{t}}$.

   Or $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$ converge donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ converge.

   D'autre part, $\dfrac{1}{(1+t^2)\sqrt{t}} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2\sqrt{t}} = \dfrac{1}{t^{5/2}}$.

   Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{5/2}}$ converge donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ converge.

   Ainsi $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ converge.

Exercice 2 (3 points)

1. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{(1+t^2)(1+t^n)}$ est continue et positive sur $[0,+\infty[$.

   On a $\dfrac{1}{(1+t^2)(1+t^n)} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{n+2}}$.

   Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{n+2}}$ converge ($n \in \mathbb{N}$) donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)(1+t^n)}$ converge.

   Ainsi I converge.

2. Via le changement de variable indiqué, on a

$$\begin{aligned}
I &= \int_{+\infty}^{0} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{u^2}\right)\left(1+\frac{1}{u^n}\right)} \frac{-\mathrm{d}u}{u^2} \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{u^{n+2}}{(1+u^2)(1+u^n)} \frac{\mathrm{d}u}{u^2} \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{u^n}{(1+u^2)(1+u^n)} \mathrm{d}u \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{1+u^n \;-1}{(1+u^2)(1+u^n)} \mathrm{d}u \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} - I \\
&= \big[\arctan(u)\big]_0^{+\infty} - I \\
&= \frac{\pi}{2} - I
\end{aligned}$$

D'où $I = \dfrac{\pi}{4}$.

Exercice 3 (4 points)

1. $\dfrac{\ln(\sin(x))}{\ln(x)} = \dfrac{\ln\left(\dfrac{\sin(x)}{x}\cdot x\right)}{\ln(x)} = 1 + \dfrac{\ln\left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right)}{\ln(x)} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1.$

   Donc $\ln(\sin(x)) \underset{0}{\sim} \ln(x)$.

2. Via la première question $\ln\big(\sin(x)\big) \underset{0}{\sim} \ln(x)$ or $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(x)\mathrm{d}x$ converge. En effet

$$\int_t^{\frac{\pi}{2}} \ln(x)\mathrm{d}x = \big[x\ln(x) - x\big]_t^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}\ln\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2} - t\ln(t) + t \underset{t\to 0}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}\ln\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2}$$

   Ainsi I converge.

   D'autre part via le changement de variable $x = \dfrac{\pi}{2} - u$ dans I, on a

$$I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \ln\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - u\right)\right)(-\mathrm{d}u) = J$$

3. Via le changement de variable $u = 2x$, on a

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\big(\sin(2x)\big)\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln\big(\sin(u)\big)\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\big(\sin(u)\big)\mathrm{d}u + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln\big(\sin(u)\big)\mathrm{d}u\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\big(\sin(u)\big)\mathrm{d}u + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\big(\cos(t)\big)\mathrm{d}t\right) \qquad \text{via le changement de variable } u = t + \frac{\pi}{2} \\
&= \frac{1}{2}(I + J) \\
&= I
\end{aligned}$$

4. On a

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\big(\sin(2x)\big)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\big(2\sin(x)\cos(x)\big)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(2)\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\big(\sin(x)\big)\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\big(\cos(x)\big)\mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi}{2}\ln(2) + I + J \end{aligned}$$

Ainsi $J = I = -\frac{\pi}{2}\ln(2)$.

Exercice 4 (3,5 points)

Appliquons la méthode de Gram-Schmidt.

$P_0 = 1$.

$P_1 = X + aP_0 = X + a$ où $a \in \mathbb{R}$ vérifie $\big\langle P_0\,, P_1\big\rangle = 0$ c'est-à-dire $\big\langle 1\,, X + a\big\rangle = 0$ soit via la linéarité à droite :

$$a = -\frac{\langle 1\,, X\rangle}{\langle 1\,, 1\rangle}$$

or $\big\langle 1\,, X\big\rangle = \int_{-1}^{1} x(1-x^2)\,\mathrm{d}x = 0$ car $x \mapsto x(1-x^2)$ est impaire. Donc $a = 0$. Ainsi $P_1 = X$.

$P_2 = X^2 + bP_0 + cP_1 = X^2 + b + cX$ où $(b, c) \in \mathbb{R}^2$ vérifie

$$\begin{cases} \big\langle P_0\,, P_2\big\rangle = 0 \\ \big\langle P_1\,, P_2\big\rangle = 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} \big\langle 1\,, X^2 + b + cX\big\rangle = 0 \\ \big\langle X\,, X^2 + b + cX\big\rangle = 0 \end{cases}$$

soit finalement comme $\big\langle 1\,, X\big\rangle = \big\langle X\,, 1\big\rangle = 0$:

$$\begin{cases} b = -\dfrac{\langle 1\,, X^2\rangle}{\langle 1\,, 1\rangle} \\[2ex] c = -\dfrac{\langle X\,, X^2\rangle}{\langle X\,, X\rangle} \end{cases}$$

Or $\big\langle X\,, X^2\big\rangle = \int_{-1}^{1} x^3(1-x^2)\,\mathrm{d}x = 0$ car $x \mapsto x^3(1-x^2)$ est impaire. Donc $c = 0$.

D'autre part

$$\big\langle 1\,, X^2\big\rangle = \int_{-1}^{1} x^2(1-x^2)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 (x^2 - x^4)\mathrm{d}x = 2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = \frac{4}{15}$$

et

$$\langle 1\,, 1\rangle = \int_{-1}^{1} (1-x^2)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 (1-x^2)\mathrm{d}x = 2\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}$$

d'où $b = -\frac{1}{5}$.

Ainsi $P_2 = X^2 - \frac{1}{5}$.

Exercice 5 (3 points)

1. Soient $(x, y, z) \in E^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

   $\Big\langle f(\lambda x+y) - (\lambda f(x) + f(y))\,,z\Big\rangle = \langle f(\lambda x+y)\,,z\rangle - \langle \lambda f(x)+f(y)\,,z\rangle = -\langle \lambda x+y\,, f(z)\rangle - \lambda\langle f(x)\,,z\rangle - \langle f(y)\,,z\rangle.$

   Donc $\Big\langle f(\lambda x+y) - (\lambda f(x) + f(y))\,,z\Big\rangle = -\lambda\langle x\,,f(z)\rangle - \langle y\,,f(z)\rangle + \lambda\langle x\,,f(z)\rangle + \langle y\,,f(z)\rangle = 0.$

2. Montrons que $(i) \Longrightarrow (ii)$.

   Supposons que pour tout $(x, y) \in E^2$, $\langle f(x)\,,y\rangle = -\langle x\,,f(y)\rangle$.

   Soit $x \in E$. Alors en particulier, $\langle f(x)\,,x\rangle = -\langle x\,,f(x)\rangle = -\langle f(x)\,,x\rangle$ donc $\langle f(x)\,,x\rangle = 0$.

   Montrons la linéarité de f.

   Soient $(x, y) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

   Via la question précédente, pour tout $z \in E$, $\Big\langle f(\lambda x+y) - (\lambda f(x) + f(y))\,,z\Big\rangle = 0$.

   Donc $f(\lambda x+y) - \big(\lambda f(x) + f(y)\big) \in E^\perp$.

   Or $E^\perp = \{0\}$ donc $f(\lambda x+y) = \lambda f(x) + f(y)$ et f est donc linéaire.

   Montrons que $(ii) \Longrightarrow (i)$.

   Supposons $f \in \mathscr{L}(E)$ et pour tout $x \in E$, $\langle f(x)\,,x\rangle = 0$.

   Soit $(x, y) \in E^2$. Alors $\langle f(x+y)\,,x+y\rangle = 0$ donc $\langle f(x)+f(y)\,,x+y\rangle = 0$.

   Ainsi $\langle f(x)\,,x\rangle + \langle f(x)\,,y\rangle + \langle f(y)\,,x\rangle + \langle f(y)\,,y\rangle = 0$.

   Or $\langle f(x)\,,x\rangle = \langle f(y)\,,y\rangle = 0$ donc $\langle f(x)\,,y\rangle = -\langle x\,,f(y)\rangle$.

Exercice 6 (3 points)

1. Via le changement de variable $u = \dfrac{t}{\sqrt{2}}$, on a $t = \sqrt{2}\,u$ donc $\mathrm{d}t = \sqrt{2}\,\mathrm{d}u$.

   Ainsi $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+2} = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{2}\,\mathrm{d}u}{2u^2+2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\big[\arctan(u)\big]_0^{+\infty} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$

   Par parité, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+2} = 2\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+2} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$

2. Via le changement de variable $u = t - \dfrac{1}{t}$, $\mathrm{d}u = \left(1 + \dfrac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t$.

   Or $\dfrac{t^2+1}{t^4+1} = \dfrac{t^2+1}{t^2}\cdot\dfrac{1}{t^2+\frac{1}{t^2}} = \left(1+\dfrac{1}{t^2}\right)\cdot\dfrac{1}{\left(t-\dfrac{1}{t}\right)^2+2}.$

   Donc $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^2+2}.$

   Ainsi, via la question précédente, $I = \dfrac{\pi}{\sqrt{2}}.$