

Contrôle TD 4

Nom :

Prénom :

Classe :

Question de cours

Soit (f_n) une suite de fonctions convergeant simplement vers f sur un intervalle I de \mathbb{R} .

Donner deux méthodes possibles pour montrer que (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur I .

Exercice 1

Soit (f_n) la suite de fonctions définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ par $f_n(x) = xe^{-nx}$.

1. Étudier la convergence simple et uniforme de (f_n) sur \mathbb{R}_+ .

2. Étudier la convergence simple de $\sum f_n$ sur \mathbb{R}_+ .

3. Étudier la convergence normale de $\sum f_n$ sur \mathbb{R}_+ .

Exercice 2

Soit (f_n) la suite de fonctions définie pour tout $x \in [0, 1]$ par $f_n(x) = x^n$. Étudier la convergence simple et uniforme de (f_n) sur $[0, 1]$ puis la convergence simple de $\sum f_n$ sur $[0, 1[$.

Exercice 3

Soit (f_n) la suite de fonctions définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{1+n^2x^2}$. Étudier la convergence simple et uniforme de (f_n) sur \mathbb{R} .