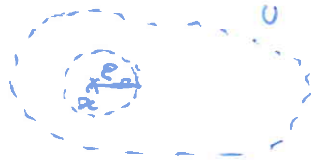
15/04 (24)

Fonctions à deux variables réelles
Cours

Ouvert de $\mathbb{R}^2$:

U ouvert de $\mathbb{R}^2$ si : $\forall u \in U \; \exists \varepsilon > 0, \; \underline{B(u,\varepsilon)} \subset U$

Boule ouverte de centre u et de rayon ε



où $B(u,\varepsilon) = \{ v \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } \|u - v\| < \varepsilon \}$.

Dérivé partielle : Soient $f : U \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ (où U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$) et $u = (u_1, u_2) \in U$

On dit que f admets des dérivées partielles (première) en u si :

$$\underline{f(u_1+h, u_2) - f(u_1, u_2)} \quad \text{et} \quad \underline{f(u_1, u_2+h) - f(u_1, u_2)}$$

admettent des limites finies lorsque $h \to 0$.

On les note alors : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(u)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(u)$

On dit que f admet des dérivées partielles secondes en u si $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ admettent des dérivées partielles en u.

On les note alors : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)(u)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(u) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(u)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(u) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(u)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(u) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(u)$$

Exemple :

1) $f(x,y) = x\sin(x^2y)$.

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \sin(x^2y) + x\cos(x^2y) \cdot 2xy$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\cos(x^2y) \cdot x^2$.

2) $f(x,y) = x\ln^{20}(x^2y)$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \ln^{20}(x^2y) + x\,20\ln^{19}(x^2y) \cdot \dfrac{1}{x^2y} \cdot 2xy$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 20x\ln^{19}(x^2y) \cdot \dfrac{1}{x^2y} \cdot x^2$

$\sin^2(x) = \sin(x) \times \sin(x)$

$\ln^{20}(x^2y) = (\ln(x^2y))^{20}$

3)

15/04 (25)

3) $f(x,y) = x^y$ où $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } x > 0\}$.

$\frac{\partial f}{\partial x} = y x^{y-1}$; $\frac{\partial f}{\partial y} = \ln(x) x^y$

$(y\ln(x))'$

$= x^y \times \ln(x)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(y,x) = y(y-1)x^{y-2}$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y) = x^{y-1} + y\ln(x)\, x^{y-1}$.

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y) = x^{y-1} + y\ln(x) x^{y-1}$.

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \ln^2(x)\, x^y$

Définition : $f : U \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (où U ouvert de $\mathbb{R}^2$)

On dit que f est de classe C^2 sur U. Si les 4 dérivées partielles existent et sont continues dans U.

R : $\forall x \in I, \forall \varepsilon > 0\ \exists \eta > 0\ \forall y \in I ; |x-y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Théorème (Schwarz)

Soit $f : U \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (où U ouvert de $\mathbb{R}^2$) de classe C^2 sur U.

Alors $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

Définition 1) On dit que u est un point critique de $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ si :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(u) = \frac{\partial f}{\partial y}(u) = 0$$

2) On dit que f admet en $u \in U$ un maximum local (respectivement minimum local) s'il existe une boule ouverte B de centre U tq :

$$\forall v \in B \cap U,\ f(v) \leq f(u) \text{ (respectivement } f(v) \geq f(u)).$$

Notation . (Monge)

Soient $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur l'ouvert U et $u \in U$ un point critique de f. On note $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u)$

$s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(U)$ $\quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(u)$

Théorème

Soient $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur l'ouvert U et $u \in U$ un point critique de f.

1) Si $rt - s^2 > 0$ et $r > 0$, f admet en u un minimum local.

2) Si $rt - s^2 > 0$ et $r < 0$, f admet en u un maximum local

3) Si $rt - s^2 < 0$, f n'admet pas d'extremum en u. On dit que u est un point-col de f.