Séries de fonctions

Soit $(f_n) \in (\mathbb{R}^{I})^{\mathbb{N}}$, $\sum f_n$: série de fonction de terme général f_n.

Exemple: $\sum f_n$ où $f_n : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^n \end{array}$

CVS : $\sum f_n$ CVS sur I si $\forall x \in I$, la série numérique $\sum f_n(x)$ CV.

Exemple: $\sum f_n$ où $f_n : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^n \end{array}$

Soit $x \in \mathbb{R}$: $\sum_{k=0}^{n} f_k(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k = \begin{cases} \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x} & \text{si } x \neq 1 \\ n+1 & \text{sinon.} \end{cases}$

$\sum_{k=0}^{n} f_k(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{}$ limite finie $\Updownarrow$ $|x| > 1$

Ainsi $\sum f_n$ CVS sur $]-1,1[$. (Vers $S : \begin{array}{l}]-1,1[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{1-x} \end{array}$) ceci est une f°

CVU: Soit $\sum f_n$ CVS vers S (ceci est une f°) sur I. On dit que $\sum f_n$ CVU sur I si :

$(S_n) = \left(\sum_{k=0}^{n} f_k\right)$ CVU sur I.

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b \sum_{k=0}^{n} f_k(x)dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_a^b f_k(x)dx \overset{??}{=} \int_a^b \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)dx$$

À savoir

1) $\sum f_n$ CVU sur $I \iff (R_n)$ CVU vers la fonction nulle sur I où $(R_n) = (S - S_n)$
$(R_n) = \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k\right)$
↳ Suite de f° des restes

Ce fait est utile en particulier dans le cas des séries alternées vérifiant le critère spécial à cause de la proposition suivante:

Proposition : Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ alternée vérifiant le critère spécial.

$\forall n \in \mathbb{N}, |R_n| \leqslant |u_{n+1}|$

Exemple:

$\sum f_n$ où $f_n : \begin{array}{l} \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{(-1)^n}{n+x} \end{array}$

Critère spécial:
Soit (u_n) une suite alternée
$(|u_n|)$ décroît et tend vers 0, alors (u_n) converge

Soit $x \in \mathbb{R}^+$: alors $\sum \frac{(-1)^n}{n+x}$ est alterné et vérifie le critère spécial car

$\left(\left|\frac{(-1)^n}{n+x}\right|\right) = \left(\frac{1}{n+x}\right)$ décroît et tend vers 0. Ainsi $\sum f_n$ CVS sur $\mathbb{R}^+$. De plus $|R_n(x)| \leqslant |f_{n+1}(x)| = \frac{1}{n+1+x}$

$\frac{1}{n+1+x} \underset{x\geqslant 0}{\leqslant} \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Donc (R_n) CVU vers la f° nulle sur $\mathbb{R}^+$. Ainsi $\sum f_n$ CVU sur $\mathbb{R}^+$

22/03 (10)

A savoir (très utile par contraposée)

f_n CVU sur $I \implies (f_n)$ CVU vers la fonction nulle sur I

Ex : $\sum f_n$ où $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{(-1)^n}{n^2+2x}$

$\sup_{x\in\mathbb{R}^+} |f_n(x)| = \frac{1}{n^2}$ or $\sum \frac{1}{n^2}$ CV donc $\sum f_n$ CVN sur I.

A savoir

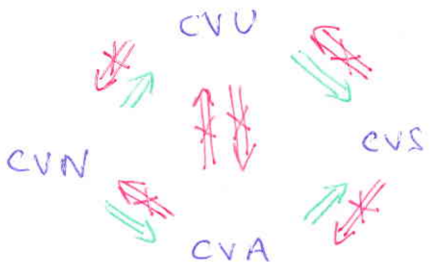
1) $\sum f_n$ CVN sur $I \iff \forall x \in I \ |f_n(x)| \leq \alpha_n$ où $\sum \alpha_n$ CV.

2) $\sum f_n$ CVN sur $I \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} \sum f_n$ CVU sur I

$\|f\|_\infty = \sup_{x\in I} |f(x)|$; $\|f\|_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sup_{x\in I} |f(x)| = \|f\|_\infty$

$\|f\|_n = \left(\int_I |f(x)|\,dx\right)^{\frac{1}{n}}$

A savoir



CVN : $\sum f_n$ CVN sur I

si $\underbrace{\sum \sup_{x\in I} |f_n(x)|}_{\text{série numérique}}$ CV

~~Suite~~
série numérique.

$x \in I$

(f_n) $\qquad (f_n(x))$

f_n $\qquad f_n(x)$

$(f_n) \in (\mathbb{R}^I)^{\mathbb{N}} = (f_0, \dots f_n, \dots)$

$(f_n(x)) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} = (f_0(x), \dots, f_n(x), \dots)$

$f_n \in \mathbb{R}^I$; $f_n(x) \in \mathbb{R}$.

CVA $\not\Leftrightarrow$ CVU

CVA :

$\sum f_n$ CVA sur I

si $\forall x \in I$, la série numérique

$\sum |f_n(x)|$ CV.

Scanné par Hyperion - annales.hyperion.tf