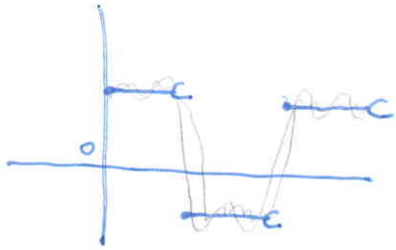
Séries de Fourier

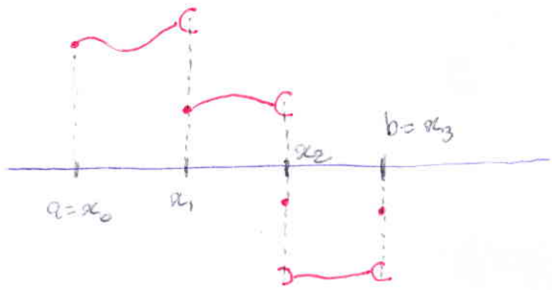


$f(x) \overset{??}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$

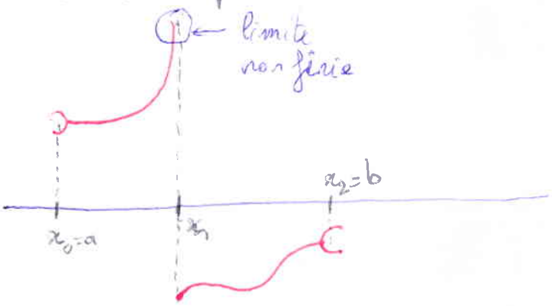
Définition On dit que $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue par morceaux s'il existe un nombre fini (éventuellement nul) de point x_i de $[a,b]$ tq :

$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$.

f est continue sur chaque intervalle $]x_i, x_{i+1}[$ et admet une limite finie à gauche et à droite en chaque x_i.



Continue par morceaux



Non continue par morceaux

f continue en $x_0 \in I$

$\Updownarrow$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0\ \forall x \in I, |x - x_0| < \eta$

$\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon, x \in]\eta - x_0, \eta + x_0[$.

Définition: Soit $f \in \underbrace{C^0_{\text{m}, 2\pi}}_{\text{Continue par morceaux et } 2\pi\text{-périodique}} (\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On appelle coefficient de Fourier associé à f.

$a_n(f)$ et $b_n(f)$ définis par :

- $a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx)\, dx$
- $b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx)\, dx$.

On appelle série de Fourier associée à f la série $\frac{a_0(f)}{2} + \sum (a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx))$

Remarques :

1) On a aussi

- $a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x)}_{2\pi\text{-période}} \underbrace{\cos(nx)}_{2\pi\text{-période}}\, dx$
- $b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx$

2) Ainsi

- f paire $\Rightarrow \begin{cases} b_n(f) = 0 \\ a_n(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx \end{cases}$
- f impaire $\Rightarrow \begin{cases} b_n(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx \\ a_n(f) = 0. \end{cases}$

D'où viennent les définitions de $a_n(f)$ et de $b_n(f)$?

Supposons que $\sum (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ CVU vers f sur $\mathbb{R}$.

Alors $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ (*)

donc $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} a_0\, dx + \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))\, dx$

CVU: $= 2\pi a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\, dx}_{=0} + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\sin(nx)}_{\text{impaire}}\, dx\right) = 2\pi a_0$

$\Rightarrow \boxed{a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx}$

Multiplions ⊛ par $\cos(kx)$ où $k \in \mathbb{N}^*$

$$f(x)\cos(kx) = a_0\cos(kx) + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos(nx)\cos(kx) + b_n\sin(nx)\cos(kx)\right)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx \underset{\text{CVU}}{=} a_0\int_{-\pi}^{\pi}\cos(kx)\,dx + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\cos(kx)\,dx + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{\sin(nx)\cos(kx)}_{\text{impaire}}\,dx\right)$$

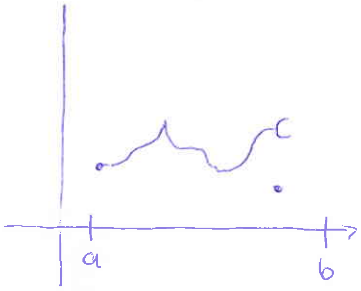
or $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\cos(kx)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\cos((n+k)x) + \cos((n-k)x)\right)dx$

$$= \frac{1}{2}\cdot 2\int_0^{\pi}\left(\cos((n+k)x) + \cos((n-k)x)\right)dx = \begin{cases} 0 \text{ si } n \neq k \\ \pi \text{ si } n = k\end{cases}$$

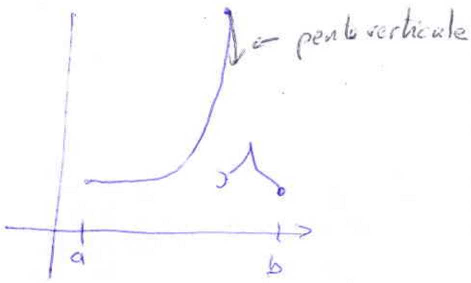
donc $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx = a_k\cdot\pi$. Donc $\boxed{a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx}$

__Définition__ : On dit que $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est C^1 par morceaux s'il existe un nombre fini (éventuellement nul) de points x_i de $[a,b]$ tq :

- $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$
- f est de classe C^1 sur chaque $]x_i, x_{i+1}[$ et f' admet une limite finie à droite et à gauche en chaque x_i



Fonction C^1 dérivable par morceau.



Fonction $\mathcal{C}$ non C^1 par morceau

__Théorème__ : (Dirichlet)

Soit $f \in C^1_{m,2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Alors la série de Fourier de f CVS vers $\tilde{f}$ sur $\mathbb{R}$.

où $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \tilde{f}(x) = \frac{1}{2}\big(\underbrace{f(x^+)}_{\text{limite à droite}} + \underbrace{f(x^-)}_{\text{limite à gauche}}\big)$$

Evidemment en tout point x où f est continue, $\tilde{f}(x) = f(x)$

Si f est continue sur $\mathbb{R}$, $\tilde{f} = f$

__Théorème__ : (Parseval)

Soit $f \in C^0_{m,2\pi}(\mathbb{R}\to\mathbb{R})$. Alors $\displaystyle\frac{a_0^2(f)}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n^2(f) + b_n^2(f)\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f^2(x)\,dx$

~~$\|c_n(f)\| = \|f\|$~~

~~$f_n(x) =$~~

Fourier

Soit f 2π-périodique :

- $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$
- $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$

$$SF(f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\right)$$

∗ Dirichlet

Si f est C^1 par morceau.

∗ Dirichlet

Si f est C^1 par morceau

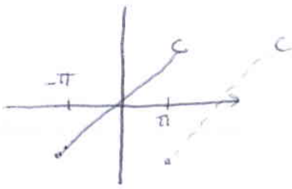
$SF(f) \xrightarrow{CVS} \tilde{f}$ où $\tilde{f}$ = regularisé de f.

$$\tilde{f}(x) = \frac{f(x^-) + f(x^+)}{2} ;$$

- $f(x^-) = \lim_{\substack{t\to x\\ t<x}} (f(t))$
- $f(x^+) = \lim_{\substack{t\to x\\ t>x}} f(t)$

Si f continue en x, $\tilde{f}(x) = f(x)$

Ex : $f(x) = x$ sur $[-\pi;\pi[$



∗ Perseval

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx = \frac{a_0^2}{4} + \sum \frac{a_n^2 + b_n^2}{2}$$

$$\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f^2(x)\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2 + b_n^2)\right)$$

Lien avec les espaces préhilbertiens :

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx$$

$\left(\frac{1}{\cancel{x}_2}, \cos(x), \sin(x), \dots, \cos(nx), \sin(nx)\right)$ est orthonormale

$$\frac{a_0^2}{2} + \left((a_1\cos(x) + b_1\sin(x)) + \dots + (a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\right)$$

∗ Quelques séries :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{-\pi^2}{12}$$