Suites de fonctions

$(U_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : (U_n) = (U_0, \dots, U_n, \dots)$ avec $U_0, U_n \in \mathbb{R}$

$(f_n) \in (\mathbb{R}^I)^{\mathbb{N}} : (f_n) = (f_0, \dots, f_n, \dots)$ avec $f_0, f_n \in \mathbb{R}^I$

Exemple :

1) $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^n$

[(f_n) converge simplement vers f si sur I :
$\forall x \in I$, la suite réelle $(f_n(x))$ CV vers $f(x)$]

càd si :

$\forall x \in I \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N}, [n \geq N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon]$

Soit $x \in [0,1]$. Alors $f_n(x) = x^n \to \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$

Ainsi (f_n) CVS sur $[0,1]$ vers $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$

Remarquons que tous les (f_n) sont continus sur $[0,1]$ alors que f est discontinue sur $[0,1]$.
En revanche, (f_n) CVS vers la f° nulle sur $[0,1[$.

2) $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{1}{n} \cdot \sin(nx)$

Soit $x \in \mathbb{R}$; alors $f_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ donc (f_n) CVS vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.
$f'(x) = \cos(nx)$. Remarquons que la suite réelle $(f'_n(x))$ n'admet pas de limite quand n tend vers $+\infty$.

Ainsi $\frac{d}{dx}\left(\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x)\right) \neq \lim\limits_{n \to +\infty}\left(\frac{d}{dx}(f_n(x))\right)$

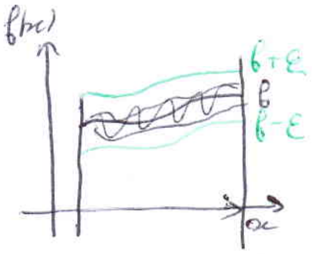
3) $f_n : [0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto n^2 x^n$

Soit $x \in [0,1[$: $f_n(0) = 0$. Si $x \in]0,1[$, $f_n(x) = n^2 x^n = n^2 e^{\overbrace{n \ln(x)}^{<0}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

donc (f_n) CVS vers la f° nulle sur $[0,1[$. or $\int_0^1 f_n(x)\,dx = n^2 \int_0^1 x^n\,dx$
$= \frac{n^2}{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx \neq \int_0^1 \underbrace{\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x)}_{=0}\,dx$

CVU : (f_n) CVU vers f sur I si
$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, [n \geq N \Rightarrow \forall x \in I, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon]$



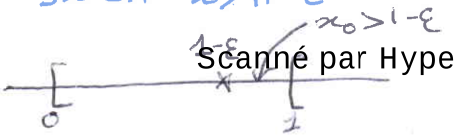
Borne supérieure :

$\text{Sup } [0,1[= 1$

Max $[0,1[$ n'existe pas

$\forall x \in A \quad x \leq M - \varepsilon$

$\exists x \in A \quad x > M - \varepsilon$



$M = \text{Sup}(A)$ signifie :
1) M est un majorant de A : càd :
$\forall x \in A, x \leq M$.
2) $\forall \varepsilon > 0$, $M - \varepsilon$ n'est plus un majorant de A :
$\forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in A, x_0 > M - \varepsilon$.

Méthodes pour montrer que (f_n) CVU vers f sur I :

1) On montre que $\sup_{x\in I}|f_n(x)-f(x)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

2) On montre que qu'il existe une suite réelle (ε_n) tq $\forall x\in I$: $\left| \begin{array}{l} f_n(x)-f(x) < \varepsilon_n \\ \text{où } \varepsilon_n \longrightarrow 0 \end{array} \right.$

Ex : $x\in\mathbb{R}_+^*$

$$|f_n(x)-f(x)| = \left|\frac{\sin(nx)}{1+nx}\right| \leq \frac{1}{1+nx} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

$$\frac{1}{1+nx} < \varepsilon \iff 1+nx > \frac{1}{\varepsilon} \iff nx > \frac{1}{\varepsilon}-1$$

3) $\forall \varepsilon>0,\ \exists N\in\mathbb{N},\ \forall n\in\mathbb{N}\ ;\ [n\geqslant N \Rightarrow |\varepsilon_n|<\varepsilon]$.

Méthodes pour montrer que (f_n) ne CVU vers f sur I :

1) On montre que $\sup_{x\in I}|f_n(x)-f(x)| \not\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

2) On montre qu'il existe $(x_n)\in I^{\mathbb{N}}$ tq $f_n(x_n)-f(x_n) \not\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

3) On montre que tous les (f_n) sont continus sur I et que f est discontinue sur I.

4) Si $I=[a,b]$ (où $(a,b)\in\mathbb{R}^2$), on montre que $\int_a^b f_n(x)\,dx \not\xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(x)\,dx$

Scanné par Hyperion - annales.hyperion.tf