

Intégrales généralisées

(deux semaines)

(du lundi 14 janvier 2019 au vendredi 25 janvier 2019)

Exercices de révision

1. Déterminer, sans intégration par parties ni changement de variables les intégrales suivantes :

$$\int_0^1 \frac{x+1}{x^2+2x+2} dx, \int_0^1 \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2} dx, \int_1^e \frac{\ln(x)}{x} dx, \int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln(x)} dx \text{ et } \int_0^1 \frac{\arctan(x)}{1+x^2} dx.$$

2. Via une intégration par parties, déterminer $\int_1^e \frac{\ln(x)}{x^2} dx$ et $\int_0^1 \ln(x + \sqrt{x^2+1}) dx$.

3. Via le changement de variable $u = \ln(t)$, déterminer $\int_1^e \frac{dt}{t(1+\ln^2(t))}$.

4. Via le changement de variable $u = \sqrt{x}$, déterminer $\int_0^1 \frac{1-x}{1+\sqrt{x}} dx$.

Exercice 1

Déterminer la nature des intégrales suivantes où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$:

1. $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$.

2. $\int_1^{+\infty} e^{-\sqrt{t^2-t}} dt$.

3. $\int_1^{+\infty} \left(e - \left(1 + \frac{1}{t} \right)^t \right) dt$.

4. $\int_0^1 \ln(t) dt$ puis $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{e^t} dt$.

5. $\int_0^{+\infty} e^{-t} dt$ puis $\int_0^{+\infty} \sin(t) e^{-t} dt$.

6. $\int_0^{1/2} \frac{dt}{\ln(t)}$.

7. $\int_0^{+\infty} \frac{t^\beta}{1+t^\alpha} dt$.

Exercice 2

Soit l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(e^t - 1)^\alpha}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer la nature de $\int_0^1 \frac{dt}{(e^t - 1)^\alpha}$ en fonction de α .
2. Déterminer la nature de $\int_1^{+\infty} e^{-\alpha t} dt$ en fonction de α .
3. En déduire la nature de $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{(e^t - 1)^\alpha}$ en fonction de α .
4. Conclure quant à la nature de $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(e^t - 1)^\alpha}$ en fonction de α .

Exercice 3

1. Montrer que l'intégrale $\int_0^1 \ln(x) dx$ est convergente.
2. En déduire la nature de l'intégrale $\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1+x^2} dx$.
3. Soit $\alpha \in]0, 1[$. Montrer par un changement de variable que

$$\int_\alpha^1 \frac{\ln(x)}{1+x^2} dx = - \int_1^{\frac{1}{\alpha}} \frac{\ln(x)}{1+x^2} dx.$$

En déduire que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{1+x^2} dx$ converge.

4. Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{1+x^2} dx$.

Exercice 4

Notons $I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t^2)}{t^2} dt$.

1. a. Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ a-t-on $\frac{\ln(1+t^2)}{t^2} = o\left(\frac{1}{t^\alpha}\right)$ quand $t \rightarrow +\infty$?
b. Montrer que I converge.
2. Notons pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $F_\varepsilon(x) = \int_\varepsilon^x \frac{\ln(1+t^2)}{t^2} dt$.
 - a. Soit $(\varepsilon, x) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Calculer $F_\varepsilon(x)$ via une intégration par parties en fonction de x et ε .
 - b. En déduire pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\int_0^x \frac{\ln(1+t^2)}{t^2} dt$ en fonction de x .
 - c. En déduire la valeur de I .

Exercice 5

Soient $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt$ et $\beta(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$ où $(\alpha, x, y) \in \mathbb{R}^3$.

1. Étudier la nature de $\Gamma(\alpha)$ en fonction de α .
2. Former une relation de récurrence entre $\Gamma(\alpha)$ et $\Gamma(\alpha + 1)$.
3. En déduire $\Gamma(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
4. Étudier la nature de $\beta(x, y)$ en fonction de x et y .
5. Montrer que $\beta(x, y) = \beta(y, x)$.

Exercice 6

Soient $(n, p) \in \mathbb{N}^2$, $I_{n,p} = \int_0^1 x^n \ln^p(x) dx$ et $J_{n,p} = \int_0^{+\infty} e^{-nt} t^p dt$.

1. Déterminer la nature des intégrales $I_{n,p}$ en fonction de n et p .
2. Via une intégration par parties, déterminer $I_{n,p}$ en fonction de $I_{n,p-1}$.
3. En déduire, pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^2$, $I_{n,p}$ en fonction de n et p .
4. Déterminer la nature de $J_{0,p}$ puis des intégrales $J_{n,p}$ en fonction de n et p .
5. Via le changement de variable $t = -\ln(x)$, déterminer $I_{n,p}$ en fonction de $J_{n+1,p}$.

Exercice 7

Considérons $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x)) dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(x)) dx$.

1. Montrer (rigoureusement) que $\ln(\sin(x)) \underset{0}{\sim} \ln(x)$.
2. Montrer que I converge et, via le changement de variable $u = \frac{\pi}{2} - x$, que $I = J$.
3. Montrer, via le changement de variable $u = 2x$, que $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(2x)) dx$.
4. Via la relation $\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$, en déduire la valeur de I .

Exercice 8

1. Soit $f(x) = \frac{\sin(x)}{x^{\frac{3}{2}}}$.

a. Étudier la nature de $\int_1^{+\infty} f(x) dx$.

b. Montrer, via une intégration par parties, que $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} dx$ converge.

c. Par une démarche similaire, montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{x} dx$ est convergente.

2. Quelle est la nature de $\int_1^{+\infty} \frac{\cos^2(x)}{x} dx$?

3. Posons $g(x) = \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}$ et $h(x) = \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} + \frac{\cos^2(x)}{x}$.

a. Quelle est la nature de $\int_1^{+\infty} h(x) dx$?

b. Montrer que $g(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} h(x)$.

c. $\int_1^{+\infty} g(x) dx$ et $\int_1^{+\infty} h(x) dx$ sont-elles de même nature ?

Expliquer pourquoi le critère de comparaison ne s'applique pas.

Exercice 9

Le but de l'exercice est de calculer l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$.

1. Montrer que I est une intégrale impropre convergente.

2. Via une intégration par parties, montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx = \frac{\pi}{4}$.

3. En déduire la valeur de I .

4. Retrouver la valeur de I via le changement de variable $u = 1/x$.

Exercice 10

Soient $a \in \mathbb{R}$ et f continue sur $[a, +\infty[$ telle que $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ converge.

Le but de cet exercice est de montrer que l'on n'a pas nécessairement $\lim_{+\infty} f = 0$ et f bornée au voisinage de $+\infty$.

1. Montrer que si $\lim_{+\infty} f$ existe, alors $\lim_{+\infty} f = 0$.

2. Via le changement de variable $u = x^2$, puis une intégration par parties, montrer que $\int_1^{+\infty} \cos(x^2) dx$ converge.

3. Via le changement de variable $u = x^3$, puis une intégration par parties, montrer que $\int_1^{+\infty} x \cos(x^3) dx$ converge.