

Espaces préhilbertiens

(trois semaines)

(du lundi 28 janvier 2019 au vendredi 15 février 2019)

Exercice 1

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \{P \in \mathbb{R}_n[X], P(0) = P(1) = 0\}$. On considère l'application $\phi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $(P, Q) \in E^2$ par

$$\phi(P, Q) = - \int_0^1 [P(x)Q''(x) + P''(x)Q(x)] dx$$

1. Montrer que E est un \mathbb{R} -ev et préciser sa dimension.
2. Montrer que ϕ est un produit scalaire sur E .

Exercice 2

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et $\|\cdot\|$ la norme associée à $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

1. Montrer que

$$\forall (x, y) \in E^2 : 1 + \|x + y\|^2 \leq 2(1 + \|x\|^2)(1 + \|y\|^2)$$

2. Montrer que

$$\forall (x, y) \in E^2 : \left\| \frac{1}{\|x\|^2}x - \frac{1}{\|y\|^2}y \right\| = \frac{1}{\|x\| \|y\|} \|x - y\|$$

3. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Pour $(x, y) \in E^2$, on pose

$$\phi(x, y) = \langle u(x), u(y) \rangle$$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur u pour que ϕ soit un produit scalaire sur E .

Exercice 3

On considère $E = C([0, 1])$ l'ensemble des fonctions à valeurs réelles continues sur $[0, 1]$ et pour tout $x \in [0, 1]$: $\phi_x : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\phi_x(f, g) = \int_0^x f(t)g(t) dt$$

1. Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$, ϕ_x est bilinéaire symétrique positive. Montrer que ϕ_1 est un produit scalaire sur E .
2. Soit $f \in E$ de classe C^1 telle que $f(0) = 0$.

a. Montrer, via l'inégalité de Cauchy-Schwarz, que pour tout $x \in [0, 1]$, $f^2(x) \leq x \int_0^1 (f'(t))^2 dt$.

b. En déduire que $2 \int_0^1 f^2(t) dt \leq \int_0^1 (f'(t))^2 dt$.

Auteur : Olivier Rodot

Exercice 4

Considérons l'application $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(A, B) = \text{tr}(A^t B)$.

1. Montrer que φ est un produit scalaire.
2. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que

$$\left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \right| \leq n \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2}$$

Exercice 5

Soient (E, \langle, \rangle) euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que f est une isométrie si $\forall x \in E, \|f(x)\| = \|x\|$.

1. Soient x et y deux vecteurs de E . Montrer que

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{2} (\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2).$$

2. Montrer que si f est une isométrie alors f est bijectif.
3. Montrer que

$$f \text{ est une isométrie} \iff \forall (x, y) \in E^2, \langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle.$$

4. Soit f une isométrie telle que $f^2 = -id$. Montrer que pour tout x dans E , $f(x)$ est orthogonal à x .
5. Soit f une isométrie telle que pour tout x dans E , $f(x)$ est orthogonal à x .

a. Soit $x \in E$. Développer $\langle f(x) + x, f^2(x) + f(x) \rangle$ et en déduire que $\langle x, f^2(x) \rangle = -\|x\|^2$.

b. Soit $x \in E$. En développant $\|f^2(x) + x\|^2$, montrer que $f^2 = -id$.

6. Soit f un endomorphisme de E vérifiant $f^2 = -id$ et tel que pour tout x dans E , $f(x)$ est orthogonal à x .

Soit $x \in E$. En développant $\langle f(x) + x, f^2(x) + f(x) \rangle$ (après avoir remarqué que ce produit scalaire est nul), montrer que f est une isométrie.

Exercice 6

Soient (E, \langle, \rangle) un espace euclidien et $f : E \rightarrow E$ une application.

1. Supposons que f vérifie $\forall (x, y) \in E^2 : \langle f(x), y \rangle = -\langle x, f(y) \rangle$. Montrer que

$$\forall (x, y, z) \in E^3, \forall \lambda \in \mathbb{R} : \langle f(\lambda x + y) - (\lambda f(x) + f(y)), z \rangle = 0$$

2. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

$$(i) \quad \forall (x, y) \in E^2 : \langle f(x), y \rangle = -\langle x, f(y) \rangle$$

$$(ii) \quad f \in \mathcal{L}(E) \text{ et } \forall x \in E \quad \langle f(x), x \rangle = 0$$

On dit que f est antisymétrique si f vérifie (i) ou (ii)

3. Supposons $f \in \mathcal{L}(E)$ antisymétrique.

a. Montrer que $\text{Ker}(f) \perp \text{Im}(f)$

b. Notons $s = f \circ f$.

Montrer que s est symétrique c'est-à-dire montrer que pour tout $(x, y) \in E^2$,

$$\langle s(x), y \rangle = \langle x, s(y) \rangle$$

et que $\text{Sp}(s) \subset \mathbb{R}^-$ où $\text{Sp}(s)$ désigne l'ensemble des valeurs propres réelles de s .

Exercice 7

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et p la projection d'image F de noyau G . Montrer que

$$G = F^\perp \iff \forall (x, y) \in E^2 : \langle p(x), y \rangle = \langle x, p(y) \rangle$$

Exercice 8

Soit E l'espace des fonctions continues sur $[0, 1]$ muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) dt$$

Soit $F = \{f \in E, f(0) = 0\}$.

1. Montrer que $F^\perp = \{0\}$.

2. En déduire $F^{\perp\perp}$.

Exercice 9

Soient $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique et $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y - z = 0\}$.

Déterminer le projeté orthogonal P_0 de $u = (1, 1, 0)$ sur F .

Exercice 10

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt$$

Soient $F = \mathbb{R}_1[X]$ et $P = X^2$.

1. À partir de la base canonique de E , construire via la méthode de Gram-Schmidt une base orthogonale de E .

2. Calculer le projeté orthogonal P_0 de P sur F .

3. En déduire $\text{Min}_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_{-1}^1 (x^2 - ax - b)^2 dx$

Exercice 11

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$. On définit l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x}dx$$

1. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E .
2. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx$. Déterminer I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. À partir de la base canonique de E , construire, via la méthode de Gram-Schmidt, une base orthogonale de E .
4. Déterminer le projeté orthogonal de X^2 sur $\mathbb{R}_1[X]$.
5. Déterminer $\text{Min}_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} (x^2 - ax - b)^2 e^{-x} dx$