Suites et séries de fonctions

(six semaines)

(du lundi 18 février 2019 au vendredi 12 avril 2019)

Exercice 1

Étudier la convergence (simple et uniforme) des suites de fonctions suivantes :

1. $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n}$ $(x \in \mathbb{R})$.
2. $f_n(x) = \dfrac{x}{n(1+x^n)}$ $(x \in \mathbb{R}^+)$.
3. $f_n(x) = \dfrac{x\sqrt{n}}{1+nx^2}$ $(x \in \mathbb{R})$.
4. $f_n(x) = xe^{-nx}$ $(x \in \mathbb{R}^+)$.
5. $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{1+n^2x^2}$ $(x \in \mathbb{R})$.
6. $f_n(x) = \dfrac{x}{x^2+n}$ $(x \in \mathbb{R})$.
7. $f_n(x) = xe^{\frac{x}{n}}$ $(x \in \mathbb{R}^+)$.
8. $f_n(x) = nx^2e^{-nx}$ $(x \in \mathbb{R}^+)$.
9. $f_n(x) = nx^n(1-x)$ $(x \in [0,1])$.

Exercice 2

Soit (f_n) la suite de fonctions définie sur $[0,2]$ par

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$$

1. Étudier la convergence simple de (f_n) sur $[0,2]$.
2. Étudier la convergence uniforme de (f_n) sur $[0,2]$.

Exercice 3

1. Montrer que (f_n) la suite de fonctions définie sur $[0,1]$ par

$$f_n(x) = \frac{ne^{-x}+x^2}{n+x}$$

converge uniformément sur $[0,1]$ vers une fonction f à déterminer.

2. En déduire la limite de la suite (u_n) définie par

$$u_n = \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$$

Exercice 4

Soit (f_n) la suite de fonctions définie sur $[-1, 1]$ par

$$f_n(x) = \sin(nx)e^{-nx^2} + \sqrt{1 - x^2}$$

1. Montrer que (f_n) converge simplement sur $[-1, 1]$ vers une fonction f à déterminer.
2. Montrer que pour tout $a > 0$, (f_n) converge uniformément vers f sur $[a, 1]$.
3. Montrer que (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur $[0, 1]$.

Exercice 5

Soit (f_n) la suite de fonctions définie sur $[0, 1]$ par

$$f_n(x) = \frac{nx}{nx + 1}$$

1. Montrer que (f_n) converge simplement sur $[0, 1]$ vers une fonction f à déterminer.
2. Montrer que pour tout $a \in]0, 1[$, (f_n) converge uniformément vers f sur $[a, 1]$.
3. Étudier la convergence uniforme de (f_n) sur $[0, 1]$.

Exercice 6

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$f_n(x) = \frac{1 + x^{2n+1}}{1 + x^{2n}}$$

1. Montrer que (f_n) converge simplement vers une fonction f à déterminer sur $\mathbb{R}^+$.
2. Montrer que (f_n) converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}^+$.

   N.B. : pour $x > 1$, utiliser la majoration $\dfrac{x - 1}{x^{2n} + 1} \leqslant \dfrac{x - 1}{x^{2n} - 1}$ pour $f(x) - f_n(x)$;

   pour $x \in [0, 1[$, utiliser la majoration $\dfrac{x^{2n}(1 - x)}{1 + x^{2n}} \leqslant \dfrac{x^{2n}(1 - x)}{1 - x^{2n}}$ pour $f(x) - f_n(x)$.

Exercice 7

Pour tout entier naturel non nul n, on définit les fonctions $f_n : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g_n : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$f_n(t) = \frac{n}{n + t} \text{ et } g_n(t) = \frac{n}{(n + t)^2}$$

1. Montrer que (f_n) et (g_n) convergent simplement sur $\mathbb{R}^+$.
2. Montrer que (f_n) ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}^+$ et que (g_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$.

3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit sur $\mathbb{R}^+$ les fonctions F_n et G_n par

$$F_n(x) = \int_0^x f_n(t)\,\mathrm{d}t \text{ et } G_n(x) = \int_0^x g_n(t)\,\mathrm{d}t$$

   a. Montrer que $F_n(x) = n \ln\left(1 + \dfrac{x}{n}\right)$.

   b. En déduire que (F_n) converge simplement sur $\mathbb{R}^+$.
   La convergence est-elle uniforme ? $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$ est-elle convergente ?

   c. Montrer que (G_n) converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ mais que la convergence n'est pas uniforme. $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_n(t)\,\mathrm{d}t$ est-elle convergente ?

4. A-t-on les égalités suivantes pour tout $x \in \mathbb{R}^+$:

$$\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = \int_0^x \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t \ ?$$

$$\lim_{n\to+\infty} G_n(x) = \int_0^x \lim_{n\to+\infty} g_n(t)\,\mathrm{d}t \ ?$$

Exercice 8

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définie sur $[0,1]$ par

$$f_n(x) = (-1)^n \frac{x^n}{n}$$

1. Étudier la convergence simple de $\sum f_n$ sur $[0,1]$.
2. Étudier la convergence uniforme de $\sum f_n$ sur $[0,1]$.
3. Étudier la convergence absolue de $\sum f_n$ sur $[0,1]$.

Exercice 9

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \frac{1}{n^x}$$

1. Étudier la convergence simple et absolue de $\sum f_n$ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $\sum f_n$ ne converge pas uniformément sur $]1,+\infty[$.

   N.B. : on pourra utiliser pour tout $x \in]1,+\infty[$ la minoration $\dfrac{1}{k^x} \geqslant \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^x}$ afin de montrer que la suite des restes (R_n) ne converge pas uniformément vers la fonction nulle sur $]1,+\infty[$.

Exercice 10

Soit (f_n) la suite de fonctions définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = ne^{-nx}$$

1. Étudier la convergence simple de $\sum f_n$ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que pour tout $a > 0$, $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$.
3. $\sum f_n$ converge-t-elle uniformément sur $[0, +\infty[$? sur $]0, +\infty[$?

Exercice 11

Soit la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x}$$

1. Étudier la convergence simple de $\sum f_n$ sur $\mathbb{R}^+$.
2. Étudier la convergence uniforme de $\sum f_n$ sur $\mathbb{R}^+$.
3. Montrer que $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 12

Soit (f_n) la suite de fonctions définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f_n(x) = xe^{-n^2x^2}$$

1. Étudier la convergence simple de $\sum f_n$ sur $\mathbb{R}^+$.
2. Étudier la convergence normale de $\sum f_n$ sur $\mathbb{R}^+$.
3. Montrer, en minorant $R_n(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ par $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} f_k(x)$, que $\sum f_n$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 13

Soit (f_n) la suite de fonctions définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f_n(x) = \frac{x}{n(1+nx^2)}$$

1. Étudier la convergence simple de $\sum f_n$ sur $\mathbb{R}^+$.
2. Étudier la convergence normale de $\sum f_n$ sur $\mathbb{R}^+$.
3. Étudier la convergence uniforme de $\sum f_n$ sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 14

Soit (f_n) la suite de fonctions définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n} e^{-x\sqrt{n}}$$

1. Étudier la convergence simple de $(|f_n|)$ sur $\mathbb{R}^+$.
2. Étudier la convergence uniforme de $(|f_n|)$ sur $\mathbb{R}^+$.
3. Étudier la convergence absolue de $\sum f_n$ sur $\mathbb{R}^+$.
4. Étudier la convergence simple de $\sum f_n$ sur $\mathbb{R}^+$.
5. Étudier la convergence normale de $\sum f_n$ sur tout intervalle $[a, +\infty[$ où $a > 0$.
6. Étudier la convergence normale de $\sum f_n$ sur $\mathbb{R}^+$ et sur $\mathbb{R}_+^*$.
7. Étudier la convergence uniforme de $\sum f_n$ sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 15

1. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définie pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ par

$$f_n(x) = \frac{xe^{-nx}}{n^2}$$

   a. Étudier la convergence simple de (f_n) sur $\mathbb{R}^+$.
   b. Étudier la convergence uniforme de (f_n) sur $\mathbb{R}^+$.
   c. Étudier la convergence simple de $\sum f_n$ sur $\mathbb{R}^+$.
   d. Étudier la convergence normale de $\sum f_n$ sur $\mathbb{R}^+$.

2. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définie pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ par

$$f_n(x) = n^a x e^{-nx}$$

   a. Étudier la convergence simple de (f_n) en fonction de a sur $\mathbb{R}^+$.
   b. Étudier la convergence uniforme de (f_n) en fonction de a sur $\mathbb{R}^+$.
   c. Étudier la convergence simple de $\sum f_n$ en fonction de a sur $\mathbb{R}^+$.
   d. Étudier la convergence normale de $\sum f_n$ en fonction de a sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 16

Soit f, la fonction 2π-périodique définie par $f(x) = |x|$ sur $[-\pi, \pi]$.

1. Donner la série de Fourier de f.
2. En déduire $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.
3. Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.

Exercice 21

Soit f, la fonction 2π-périodique définie par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [-\pi, 0[\\ x & \text{si } x \in [0, \pi[\end{cases}$

1. Déterminer la série de Fourier de f.
2. En déduire $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$ puis $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2}$.