Logica Releasing your potential — Université

# Intégrales généralisé

Exercices de révision

1)

- $\int_0^1 \frac{x+1}{x^2+2x+2}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x+1}{\frac{x^2}{2}+x+1}dx$ (forme $\frac{u'}{u}$)

$= \frac{1}{2}\left[\ln(x^2+2x+2)\right]_0^1 = \frac{1}{2}(\ln(5)-\ln(2))$

- $\int_0^1 \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}dx = -\left[\frac{1}{x^2+x+1}\right]_0^1 = -\left(\frac{1}{3}-1\right) = \frac{2}{3}$

- $\int_1^e \frac{\ln(x)}{x}dx = \frac{1}{2}\left[\ln^2(x)\right]_1^e = \frac{1}{2}(1-0) = \frac{1}{2}$

- $\int_e^{e^2} \frac{1}{x\ln(x)}dx = \left[\ln(\ln(x))\right]_e^{e^2} = \ln(\ln(e^2)) - \ln(\ln(e)) = \ln(2)$

Calcul formel : Wolfram

- $\int_0^1 \frac{\arctan(x)}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\left[\arctan^2(x)\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{16}-0\right) = \frac{\pi^2}{32}$

2) Via IPP $\Rightarrow$ $\int_1^e \frac{\ln(x)}{x^2}dx = -\left[\frac{\ln(x)}{x}\right]_1^e - \int_1^e -\frac{1}{x^2}dx$ (forme $[uv'] - \int u'v$)

$= \frac{-1}{e} + \int_1^e \frac{dx}{x^2} = \frac{-1}{e} - \left[\frac{1}{x}\right]_1^e$

$= \frac{-1}{e} - \left(\frac{1}{e}-1\right) = 1 - \frac{2}{e}$

- $\int_0^1 \ln(x+\sqrt{x^2+1})dx.$

$u(x) = \ln(x+\sqrt{x^2+1}) \Rightarrow u'(x) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \times \left(1+\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+1}}\right)$

$= \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2+1}} \times \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$

$v(x) = x \Leftarrow v'(x) = 1$

$\int_0^1 \ln(x+\sqrt{x^2+1})dx = \left[x\ln(x+\sqrt{x^2+1})\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$

$= \ln(1+\sqrt{2}) - \left[\sqrt{x^2+1}\right]_0^1 = \ln(1+\sqrt{2}) - (\sqrt{2}-1) = 1-\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})$

3) Via changem - de variable

$u = \ln(t)$ $\int_1^e \frac{dt}{t(1+\ln^2(t))}$

$dt = e^u du$

$\int_1^e \frac{dt}{t(1+\ln^2(t))} = \int_0^1 \frac{e^u du}{e^u(1+u^2)} = [\arctan(u)]_0^1 = \frac{\pi}{4}$

4) $u = \sqrt{x}$ $\int_0^1 \frac{1-x}{1+\sqrt{x}} dx = \int_0^1 \frac{1-u^2}{1+u} 2u du = 2\int_0^1 (1-u) du$ $1-u^2 = (1-u)(1+u)$

$t = u^2$

$dt = 2u du$ $= 2\left[\frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3}\right]_0^1 = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$

Partie Cours

Definition : $f$ continue sur $[a,b[$ où $-\infty < a < b \leq +\infty$

On dit que $\int_a^b f(t)dt$ converge si $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ admet une limite quand $x \mapsto b$.

On a alors $\int_a^b f(t)dt = \lim_{x \to b} \int_a^x f(t)dt$. On dit que $\int_a^b f(t)dt$ diverge sinon

Exemple : 1) $\int_0^x \frac{dt}{1-t} = -[\ln(1-t)]_0^x = -\ln(1-x) \xrightarrow[x \to 1]{} +\infty$

donc $\int_0^1 \frac{dt}{1-t}$ diverge

2) $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ ? $\int_1^x \frac{dt}{t^2} = -\left[\frac{1}{t}\right]_1^x = 1 - \frac{1}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$

donc $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge et vaut 1.

Definition Soit $f$ continue sur $]a,b]$ et non definie en $a$ où $-\infty \leq a < b < +\infty$

On sait que $\int_a^b f(t)dt$ converge si $x \mapsto \int_x^b f(t)dt$ admet une limite finie quand $x \mapsto a$

On sait que $\int_a^b f(t)dt$ diverge sinon.

Releasing your potential logica

Université

**Exemple** $\int_0^1 \ln(t)\,dt$ ? $u(t)=\ln(t) / u'(t)=\frac{1}{t} / v(t)=t / v'(t)=1$

$\int_x^1 \ln(t)dt = [t\ln(t)]_x^1 - \int_x^1 dt$

$= -x\ln(x) - [t]_x^1 = -x\ln(x) - 1 + x \xrightarrow[x\to 0]{} -1$

donc $\int_0^1 \ln(t)dt$ CV et vaut $-1$.

**Definition** Soit $f$ continue sur $]a,b[$, non définie en $a$ et $b$ où $-\infty \leq a < b < +\infty$. On dit que $\int_a^b f(t)dt$ converge si $\forall c \in ]a,b[$, $\int_a^c f(t)dt$ et $\int_c^b f(t)dt$ converge

On a alors $\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$

On dit que $\int_a^b f(t)dt$ diverge sinon.

**Exemple**: $\int_{-\infty}^{+\infty} t\,dt$ ? Etudions $\int_0^{+\infty} t\,dt$ ?

$\int_0^x t\,dt = \frac{1}{2}[t^2]_0^x = \frac{1}{2}x^2 \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ donc $\int_0^{+\infty} t\,dt$ Diverge.

donc $\int_{-\infty}^{+\infty} t\,dt$ diverge

A savoir: $\alpha \in \mathbb{R}$

1) $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ CV $\Leftrightarrow \alpha < 1$

$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ cv $\Leftrightarrow \alpha > 1$

2) Soit $f$ continue et positif sur $[a,b[$ où $-\infty < a < b \leq +\infty$

$0 \leq f(t) \leq g(t)$ Alors: $\int_a^b g(t)dt$ cv $\Rightarrow \int_a^b f(t)dt$ cv

3) $f$ continue et positive sur $[a,b[$ où $-\infty < a < b \leq +\infty$

tq $f = o(g)$ [$f$ negligeable devant $g$].

Alors $\int_a^b g(t)dt$ CV $\Rightarrow \int_a^b f(t)dt$ CV

Releasing your potential logica — Université

4) $f$ continue sur $[a,b[$ où $-\infty < a < b \leq +\infty$ tq $f \underset{b}{\sim} g$ de signe constant
Alors $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$ sont de même nature

Exercice n°1

1) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ DV. En effet, s'il existait $\alpha \in \mathbb{R}$ tq $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ CV alors $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ convergerait donc $\alpha < 1$ et $\alpha > 1$

Absurde

Prérequis :
$\sim$
$o$
primitive
IPP
ICV
CVA

$\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ CV $\Leftrightarrow$ $\alpha < 1$
$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ CV $\Leftrightarrow$ $\alpha > 1$

2) $\int_1^{+\infty} e^{-\sqrt{t^2-t}} dt$ (Methode du $o$)

Quand $e^{-x}$ alors mult par $t^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$)

$t^2 e^{-\sqrt{t^2-t}} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$ donc $\underbrace{e^{-\sqrt{t^2-t}}}_{>0} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$

or $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ CV donc

permet de comparer avec l'intég. de $\frac{1}{t^2}$

$\int_1^{+\infty} e^{-\sqrt{t^2-t}} dt$ CV

$f = o(g) \Leftrightarrow \frac{f}{g} \to 0$

3) $\int_1^{+\infty} \left(e - \left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right) dt = \int_1^{+\infty} e - e^{t\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)}$

Developpement limité

$= \int_1^{+\infty} e - e^{t\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{2t^2} + o\left(\frac{1}{t^2}\right)\right)}$

$= \int_1^{+\infty} e - e^{1 - \frac{1}{2t} + o\left(\frac{1}{t}\right)} = \int_1^{+\infty} e\left(1 - e^{\left(\frac{-1}{2t} + o\left(\frac{1}{t}\right)\right)}\right)$

$= \int_1^{+\infty} e\left(1 - 1 - \frac{1}{2t} + o\left(\frac{1}{t}\right)\right) = \int_1^{+\infty} \frac{e}{2t} + o\left(\frac{1}{t}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{e}{2t} > 0$

or $\int_1^{+\infty} \frac{e}{2t} dt$ DV donc $\int_1^{+\infty} \left(e - \left(1 - \left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right)\right) dt$ DV.

4) $\int_0^1 \ln(t) dt$ et $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{e^t} dt$

En 0 : $\frac{\ln(t)}{e^t} \underset{0}{\sim} \ln(t)$ signe constant sur $]0;1]$

or $\int_0^1 \ln(t) dt$ CV donc $\int_0^1 \frac{\ln(t)}{e^t} dt$ CV

Maths ②

Logica — Releasing your potential | Université

En $+\infty$ : $t^2 \times \frac{\ln(t)}{e^t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ donc $\frac{\ln(t)}{e^t} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$. Or

$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ cv donc $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{e^t} dt$ CV

Ainsi $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{e^t} dt$ CV.

5) [A savoir : $f$ $C^0$ sur $[a,b[$, $\int_a^b f(t)dt$ CV absolument si $\int_a^b |f(t)|dt$ converge].

Pour les séries, on utilise la CVA quand il y a du sin et cos (ou)

• $t^2 e^{-t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ donc $e^{-t} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$

or $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ cv donc $\int_1^{+\infty} e^{-t}dt$ cv donc $\int_0^{+\infty} e^{-t}dt$ cv

même interval

car $\int_0^1 e^{-t}dt$ est un nbre (pas de pb sur les bornes)

• $\int_0^{+\infty} \sin(t)e^{-t}dt$ : $|\sin(t)e^{-t}| \leq e^{-t}$ or $\int_0^{+\infty} e^{-t}dt$ cv donc

$\int_0^{+\infty} \sin(t)e^{-t}dt$ CVA donc CV

Guide Méthode
CVA → sin/cos
IPP/ICV → Précisé par la consigne

Méthode du $o$
$t^\alpha \times ()$
$\alpha < 1$ car $\int_0^1$

6) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{\ln(t)}$ : $\sqrt{t} \cdot \frac{1}{\ln(t)} \xrightarrow[t\to 0]{} 0$ donc $\frac{1}{\ln(t)} = o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$. Or

$\int_0^{1/2} \frac{dt}{\sqrt{t}}$ CV donc $\int_0^{1/2} \frac{dt}{\ln(t)}$ CV.

$\sim \int_0^1 \frac{dt}{t^{\frac{1}{2}}}$ CV car $\frac{1}{2} < 1$

7) En 0 : $\frac{t^\beta}{1+t^\alpha} \underset{0}{\sim} \begin{cases} \bullet\ t^\beta = \frac{1}{t^{-\beta}} \text{ si } \alpha > 0 \\ \bullet\ \frac{t^\beta}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t^{-\beta}} \text{ si } \alpha = 0 \\ \bullet\ \frac{t^\beta}{t^\alpha} = \frac{1}{t^{\alpha-\beta}} \text{ si } \alpha < 0 \end{cases}$

$\int_0^1 \frac{t^\beta}{1+t^\alpha} dt$ CV $\iff$ $(\alpha > 0$ et $-\beta < 1)$ ou $(\alpha = 0$ et $-\beta < 1)$

ou $(\alpha < 0$ et $\alpha - \beta < 1)$ $\iff$ $\underbrace{(\alpha > 0 \text{ et } \beta > -1)}_{A}$ ou $\underbrace{(\alpha = 0 \text{ et } -\beta > -1)}_{B}$ ou $\underbrace{(\alpha < 0 \text{ et } \alpha - \beta < 1)}_{C}$

En $+\infty$ :

$$\frac{t^\beta}{1+t^\alpha} \underset{+\infty}{\sim} \begin{cases} \bullet\ \frac{t^\beta}{t^\alpha} = \frac{1}{t^{\alpha-\beta}} \text{ si } \alpha>0 \\ \bullet\ \frac{t^\beta}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t^{-\beta}} \text{ si } \alpha=0 \\ \bullet\ t^\beta = \frac{1}{t^{-\beta}} \text{ si } \alpha<0 \end{cases}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{t^\beta}{1+t^\alpha}\,dt \text{ CV} \Leftrightarrow \left| \begin{array}{c} (\alpha>0 \text{ et } \alpha-\beta>1) \\ \text{ou} \\ (\alpha=0 \text{ et } -\beta>1) \\ \text{ou} \\ (\alpha<0 \text{ et } -\beta>1) \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{c} \overbrace{(\alpha>0 \text{ et } \alpha-\beta>1)}^{D} \\ \text{ou} \\ \overbrace{(\alpha=0 \text{ et } -\beta<-1)}^{E} \\ \text{ou} \\ \overbrace{(\alpha<0 \text{ et } -\beta<-1)}^{F} \end{array} \right|$$

donc $\int_0^{+\infty} \frac{t^\beta}{1+t^\alpha}\,dt$ CV $\Leftrightarrow \int_0^1$ —— et $\int_1^{+\infty}$ —— CV

$\Leftrightarrow$ (A ou B ou C) et (D ou E ou F)

$\Leftrightarrow$ (A et D) ou ($\cancel{\text{A et E}}$) ou ($\cancel{\text{A et F}}$) ou ($\cancel{\text{B et D}}$) ou ($\cancel{\text{B et E}}$) ou ($\cancel{\text{B et F}}$) ou ($\cancel{\text{C et E}}$) ou (C et F) ou ($\cancel{\text{C et D}}$)

$\Leftrightarrow$ ($\alpha>0$ et $\beta>-1$ et $\alpha-\beta>1$) ou ($\alpha<0$ et $\alpha-\beta<1$ et $\beta<-1$).

$\Leftrightarrow$ ($\beta>-1$ et $\alpha-\beta>1$) ou ($\alpha-\beta<1$ et $\beta<-1$).

Exercice n°2 : $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(e^t-1)^\alpha}$ :

(Pbm en 0)

1) $\int_0^1 \frac{dt}{(e^t-1)^\alpha}$ : $\frac{\quad}{(1+t+o(t)-1)} = t+o(t) \underset{0}{\sim} t$

donc $(e^t-1)^\alpha \underset{0}{\sim} t^\alpha$. Ainsi $\frac{1}{(e^t-1)^\alpha} \underset{0}{\sim} \frac{1}{t^\alpha}$) $>0$ or $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ cv ssi $\alpha<1$

Donc $\int_0^1 \frac{dt}{(e^t-1)^\alpha}$ CV ssi $\alpha<1$

2) $\int_1^x e^{-\alpha t}\,dt = \begin{cases} [t]_1^x \text{ si } \alpha=0 \\ \frac{-1}{\alpha}[e^{-\alpha t}]_1^x \text{ si } \alpha\neq 0 \end{cases} = \begin{cases} x-1 \text{ si } \alpha=0 \\ \frac{-1}{\alpha}(e^{-\alpha x}-e^{-\alpha} \text{ si } \alpha\neq 0 \end{cases}$

$\int_1^x e^{-\alpha t}\,dt \xrightarrow[x\to+\infty]{}$ lim finie $\Leftrightarrow \alpha>0$

donc $\int_1^{+\infty} e^{-\alpha t}\,dt$ CV $\Leftrightarrow \alpha>0$

Raisonnement par équivalence 3) $\frac{1}{(e^t-1)^\alpha} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{e^{\alpha t}} = e^{-\alpha t}$ or $\int_1^{+\infty} e^{-\alpha t} dt$ CV $\Leftrightarrow \alpha > 0$

donc $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{(e^t-1)^\alpha}$ CV $\Leftrightarrow \alpha > 0$

4) $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(e^t-1)^\alpha}$ CV $\Rightarrow \int_0^1 -$ et $\int_1^{+\infty} -$ CV $\Leftrightarrow \alpha < 1$ et $\alpha > 0 \Leftrightarrow 0 < \alpha < 1$

Exercice n°3 1) Voir le cours (exemple)

2) $\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1+x^2} dx$ : $\frac{\ln(x)}{1+x^2} \underset{0}{\sim} \ln(x)$ or $\int_0^1 \ln(x) dx$ CV donc

$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1+x^2} dx$ CV

3) $u = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{u} \Rightarrow dx = -\frac{1}{u^2} du$

$\int_\alpha^1 \frac{\ln(x)}{1+x^2} dx = \int_{\frac{1}{\alpha}}^1 \frac{\ln(\frac{1}{u})}{1+\frac{1}{u^2}} \cdot \left(\frac{-1}{u^2} du\right) = \int_{\frac{1}{\alpha}}^1 \frac{\ln(u)}{u^2+1} du$

$= -\int_1^{\frac{1}{\alpha}} \frac{\ln(u)}{u^2+1} du$

Comme $\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1+x^2} dx$ CV. $\lim_{t \to 0} \int_t^1 \frac{\ln(x)}{1+x^2} dx$ est finie donc $\lim_{t \to 0} \int_1^{\frac{1}{t}} \frac{\ln(x)}{1+x^2} dx$ est finie d'où $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{1+x^2} dx$ CV

4) En faisant tendre $\alpha$ vers 0 on a : $\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1+x^2} dx = -\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{1+x^2} dx$

donc $\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1+x^2} dx + \int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{1+x^2} dx = 0$ donc $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{1+x^2} dx = 0$

Exercice n°4 1) a) $\frac{\ln(1+t^2)}{t^2} = o\left(\frac{1}{t^\alpha}\right) \Leftrightarrow \frac{\ln(1+t^2)}{t^2} \times t^\alpha \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$

$\Leftrightarrow \frac{\ln(1+t^2)}{t^{2-\alpha}} \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$ ssi $2-\alpha > 0 \Leftrightarrow \alpha < 2$

b) En 0 : $\frac{\ln(1+t^2)}{t^2} \underset{0}{\sim} \frac{t^2}{t^2} = 1$ or $\int_0^1 1 dt$ CV

donc $\int_0^1 \frac{\ln(1+t^2)}{t^2} dt$ CV

En $+\infty$ : $\frac{\ln(1+t^2)}{t^2} = o\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)$ via a)

or $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{3/2}}$ cv donc $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+t^2)}{t^2}\, dt$ CV d'où

$I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t^2)}{t^2}\, dt$ CV

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2p}} = \zeta(2p)$

IPP

2)a) $u(t) = \ln(1+t^2) \Rightarrow u'(t) = \frac{2t}{1+t^2}$

$v(t) = \frac{-1}{t} \Leftarrow v'(t) = \frac{1}{t^2}$

$F_\varepsilon(x) = -\left[\frac{\ln(1+t^2)}{t}\right]_\varepsilon^x + 2\int_\varepsilon^x \frac{dt}{1+t^2}$

$F_\varepsilon(x) = \frac{\ln(1+\varepsilon^2)}{\varepsilon} - \frac{\ln(1+x^2)}{x} + 2\left[\operatorname{Arctan}(t)\right]_\varepsilon^x$

$= \frac{\ln(1+\varepsilon^2)}{\varepsilon} - \frac{\ln(1+x^2)}{x} + 2(\operatorname{Arctan}(x) - \operatorname{Arctan}(\varepsilon))$

b) $\frac{\ln(1+\varepsilon^2)}{\varepsilon} \underset{0}{\sim} \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon} = \varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$ et $\operatorname{Arctan}(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$

$F_\varepsilon(x) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 2\operatorname{Arctan}(x) - \frac{\ln(1+x^2)}{x}$. Ainsi $\int_0^x \frac{\ln(1+t^2)}{t^2}\, dt$

$= 2\operatorname{Arctan}(x) - \frac{\ln(1+x^2)}{x}$

c) $\frac{\ln(1+x^2)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ ; $\operatorname{Arctan}(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{\pi}{2}$ ; Donc $I = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi$

Exercice n°5 :

$>0$

1) En 0 : $e^{-t}t^{\alpha-1} \underset{0}{\sim} t^{\alpha-1} = \frac{1}{t^{1-\alpha}}$ or $\int_0^1 \frac{dt}{t^{1-\alpha}}$ CV $\Leftrightarrow 1-\alpha<1$

donc $\int_0^1 e^{-t}t^{\alpha-1}\, dt$ CV $\Leftrightarrow 1-\alpha<1 \Leftrightarrow \alpha>0$

En $+\infty$ : ~~o~~ $\forall \alpha\in\mathbb{R}$, $t^2 e^{-t} t^{\alpha-1} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$. Donc

$\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $e^{-t}t^{\alpha-1} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$

or $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ cv donc $\forall \alpha\in\mathbb{R}$, $\int_1^{+\infty} e^{-t}t^{\alpha-1}\, dt$ CV.

CCL : $\Gamma(\alpha)$ CV $\Leftrightarrow \alpha>0$

Dérivée donc IPP

2) $\Gamma(\alpha+1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\alpha} dt = \underbrace{-\left[e^{-t}t^{\alpha}\right]_0^{+\infty}}_{=0} + \alpha \underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{\alpha-1}dt}_{\Gamma(\alpha)}$

$u(t) = t^{\alpha} \Rightarrow u'(t) = \alpha t^{\alpha-1}$

$v(t) = -e^{-t} \Leftarrow v'(t) = e^{-t}$

$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\,\Gamma(\alpha)$

3) $\Gamma(n) = (n-1)\cancel{\Gamma(n-1)}$

$\cancel{\Gamma(n-1)} = (n-2)\cancel{\Gamma(n-2)}$

$\vdots$

$\cancel{\Gamma(2)} = 1\,\Gamma(1)$

X

$\Gamma(n) = (n-1)!\,\Gamma(1)$

or $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}dt = -\left[e^{-t}\right]_0^{+\infty} = 1$

donc $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \Gamma(n) = (n-1)!$

4) En 0 : $\beta(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$ où $(\alpha, x, y) \in \mathbb{R}^3$

$t^{x-1}(1-t)^{y-1} \underset{0}{\sim} \underbrace{t^{x-1}}_{\text{positif}} = \frac{1}{t^{1-x}}$

or $\int_0^{1/2} \frac{1}{t^{1-x}}dt$ CV $\Leftrightarrow 1-x<1$

donc $\int_0^{1/2} t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$ CV $\Leftrightarrow 1-x<1 \Leftrightarrow x>0$

ICV $u = 1-t / dt = -du$

En 1 : $t^{x-1}(1-t)^{y-1} \underset{1}{\sim} (1-t)^{y-1}$ or $\int_{1/2}^1 \frac{dt}{(1-t)^{1-y}} = \int_{1/2}^0 \frac{-du}{u^{1-y}} = \int_0^{1/2} \frac{du}{u^{1-y}}$

CV ssi $1-y<1 \Leftrightarrow y>0$. donc $\int_{1/2}^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$ CV ssi $y>0$.

CCL : $\beta(x,y)$ CV $\Leftrightarrow x>0$ et $y>0$

5) ICV $\Rightarrow u = 1-t$

$\beta(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt = \int_1^0 (1-u)^{x-1}u^{y-1}(-du)$

$= \int_0^1 (1-u)^{x-1}u^{y-1}du = \beta(y,x)$

Exercice n°6 : 1) or $\sqrt{x}\,x^n \ln^p(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$ $(\forall p \in \mathbb{N})$ donc $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2,\ x^n \ln^p(x) = o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

or $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ CV donc $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, $I_{n,p}$ CV.

Exercice n°6 : 2) $I_{n,p} = \int_0^1 x^n \ln^p(x)\,dx$ $\quad u(x) = \ln^p(x) \Rightarrow u'(x) = p\ln^{p-1}(x)\cdot\frac{1}{x}$

$v(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} \Leftarrow v'(x) = x^n$

$I_{n,p} = \frac{1}{n+1}\underbrace{\left[x^{n+1}\ln^p(x)\right]_0^1}_{=0} - \frac{p}{n+1}\int_0^1 x^n \ln^{p-1}(x)\,dx = \frac{-p}{n+1}\cdot I_{n,p-1}$

3) $I_{n,p} = \frac{-p}{n+1}\cdot \cancel{I_{n,p-1}}$

$\cancel{I_{n,p-1}} = \frac{-p-1}{n+1}\cdot \cancel{I_{n,p-2}}$

$\vdots$

$\cancel{I_{n,1}} = -\frac{1}{n+1} I_{n,0}$

$I_{n,p} = \frac{(-1)^p}{(n+1)^p}\cdot p!\,I_{n,0}$ or $I_{n,0} = \int_0^1 x^n\,dx = \frac{1}{n+1}$

donc $I_{n,p} = \frac{(-1)^p}{(n+1)^{p+1}}\cdot p!$

4) $J_{0,p} = \int_0^{+\infty} t^p\,dt$. $\forall p \in \mathbb{N}$, $J_{0,p}$ DV

$\forall (n,p) \in (\mathbb{N}^* \times \mathbb{N})$, $t^2 e^{-nt} t^p \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ donc $e^{-nt}t^p = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$

or $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ CV donc $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, $\int_1^{+\infty} e^{-nt} t^p\,dt$ CV

donc $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, $J_{n,p}$ CV

5) $I_{n,p} = \int_0^1 x^n \ln^p(x)\,dx$ $\quad t = \ln(x) \Leftrightarrow x = e^{-t} \Rightarrow dx = -e^{-t}\,dt$

$= \int_{+\infty}^0 e^{-nt}(-1)^p t^p(-e^{-t})\,dt = (-1)^p \int_0^{+\infty} e^{-(n+1)t} t^p\,dt = (-1)^p J_{n+1,p}$.

Exercice n°7 : 1) Mq $\frac{\ln(\sin(x))}{\ln(x)} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$

$\frac{\ln(\sin(x))}{\ln(x)} = \frac{\ln\left(x \times \frac{\sin(x)}{x}\right)}{\ln(x)} = \frac{\ln(x) + \ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)}{\ln(x)} = 1 + \frac{\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)}{\ln(x)} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$

2) En 0 : $\ln(\sin(x)) \underset{0}{\sim} \ln(x)$ négatif $\quad$ or $\int_0^{\pi/2} \ln(x)\,dx$ CV donc $I = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(x))\,dx$ CV

$u = \frac{\pi}{2} - x \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} - u \Rightarrow dx = -du$

$= \int_{\pi/2}^0 \ln\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - u\right)\right)(-du)$ or $\sin\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=1}\cos(u) - \sin(u)\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=0} = \cos(u)$

$I = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos(u))\,du = J$.

3) $\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(2x))\,dx$ $\quad u = 2x \Rightarrow x = \frac{u}{2} \Rightarrow dx = \frac{du}{2}$

$\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(2x))\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln(\sin(u))\,du$

logica

University

$= \frac{1}{2}\left(\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(u))du + \int_{\pi/2}^{\pi} \ln(\sin(u))du\right)$ or $\int_{\pi/2}^{\pi} \ln(\sin(u))du = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t+\frac{\pi}{2}))dt$

or $\sin(t+\frac{\pi}{2}) = \sin(t)\underbrace{\cos(\frac{\pi}{2})}_{=0} + \underbrace{\sin(\frac{\pi}{2})}_{=1}\cos(t) = \cos(t)$.

donc $\int_{\pi/2}^{\pi} \ln(\sin(u))du = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos(t))dt = J = I$.

donc $\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(2x))dx = \frac{1}{2}(I+I) = I$.

3) $I = \int_0^{\pi/2} \ln(2\sin(x)\cos(x))dx = \int_0^{\pi/2} \ln(2)dx + \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(x))dx + \int_0^{\pi/2} \ln(\cos(x))dx$

$\cancel{I} = \frac{\pi}{2}\ln(2) + \cancel{I} + J$ donc $J = I = -\frac{\pi}{2}\ln(2)$

Exercice n°8 : 1)a) $\left|\frac{\sin(x)}{x^{3/2}}\right| \leq \frac{1}{x^{3/2}}$ or $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{3/2}}$ CV donc $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^{3/2}}dx$ CVA donc CV

b) $u(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow u'(x) = -\frac{1}{2}x^{-3/2}$ / $v(x) = \sin(x) \Leftarrow v'(x) = \cos(x)$.

$\int_1^{+\infty} \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}dx = \left[\frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}\right]_1^{+\infty} + \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^{3/2}}dx = -\sin(1) + \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^{3/2}}dx$.

or $\left|\frac{\sin(x)}{x^{3/2}}\right| \leq \frac{1}{x^{3/2}}$ donc $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^{3/2}}dx$ CVA donc CV.

Ainsi $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}dx$ CV.

c) $u(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow u'(x) = \frac{-1}{x^2}$ / $v(x) = \frac{1}{2}\sin(2x) \Leftarrow v'(x) = \cos(2x)$

$\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{x}dx = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(2x)}{x}\right]_1^{+\infty} + \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{\sin(2x)}{x^2}dx = \frac{-1}{2}\sin(2) + \frac{1}{2}\underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{\sin(2x)}{x^2}dx}_{\text{CVA donc CV}}$

donc $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{x^2}dx$ CV

2) $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$ : $(\cos(2x) = \cos(x+x) = \cos(x)\cos(x) - \sin(x)\sin(x)$

$= \cos^2(x) - \sin^2(x) = \cos^2(x) - (1-\cos^2(x)) = 2\cos^2(x) - 1)$

donc $\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1+\cos(2x))$. $\int_1^{+\infty} \frac{\cos^2(x)}{x}dx = \frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{x} + \frac{\cos(2x)}{x}\right)dx$

or $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ DV et $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{x}dx$ CV donc $\int_1^{+\infty} \frac{\cos^2(x)}{x}dx$ DV

3)a) $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} dx$ CV (f. 1)b) ; $\int_1^{+\infty} \frac{\cos^2(x)}{x} dx$ DV (f. 2)) donc $\int_1^{+\infty} h(x)dx$ DV

b) Mq $\frac{h(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$ ; $\frac{h(x)}{g(x)} = 1 + \frac{\cos^2(x)}{x} \times \frac{\sqrt{x}}{\cos(x)} = 1 + \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$ donc $g \underset{+\infty}{\sim} h$

c) $\int_1^{+\infty} h(x)dx$ DV or $\int_1^{+\infty} g(x)dx$ CV.

Le critère d'équivalence ne peut s'appliquer car les fonctions g et h ne sont pas de signes constant

Exercice n°9: 1) $\frac{1}{1+x^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}$ donc $\frac{1}{(1+x^2)^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x^4}$ or $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^4}$ CV donc $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$

Ainsi I CV

2) $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx = \int_0^{+\infty} x . \frac{x}{(1+x^2)^2} dx$ ; $u(x) = x \Rightarrow u'(x) = 1$ ; $v(x) = \frac{-1}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2} \Leftarrow v'(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2}$

$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx = \frac{-1}{2} \Big[ \underbrace{\frac{x}{1+x^2}}_{=0} \Big]_0^{+\infty} + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} [\text{Arctan}(x)]_0^{+\infty} = \frac{1}{2}(\frac{\pi}{2} - 0) = \frac{\pi}{4}$

3) $I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx = \int_0^{+\infty} \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^2} dx = \int_0^{+\infty} \left( \frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2}{(1+x^2)^2} \right) dx \underset{\text{car les 2 intégrales CV}}{=} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} - \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx$

$= [\text{Arctan}(x)]_0^{+\infty} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$

4) $u = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{u} \Rightarrow dx = \frac{-du}{u^2}$. $I = \int_{+\infty}^0 \frac{1}{(1+\frac{1}{u^2})^2} \cdot \frac{-du}{u^2} = \int_0^{+\infty} \frac{u^2}{(u^2+1)^2} du = \frac{\pi}{4}$

Exercice n°10: 1) Notons $\ell = \lim_{+\infty} f$. Supposons $\ell \neq 0$. Alors $\ell < 0$ ou $\ell > 0$. Supposons par exemple $\ell > 0$

Alors $f \underset{+\infty}{\sim} \ell > 0$ or $\int_a^{+\infty} \ell dx$ DV (car $\int_a^t \ell dx = \ell[x]_a^t = \ell(t-a) \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$ ) donc $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ DV

Absurde

2) $\int_1^t \cos(x^2) dx = \int_1^{t^2} \cos(u) \frac{1}{2\sqrt{u}} du = \frac{1}{2} \int_1^{t^2} \frac{\cos(u)}{\sqrt{u}} du$

$f(u) = \frac{1}{\sqrt{u}} = u^{-1/2} \Rightarrow f'(u) = \frac{-1}{2} u^{-3/2}$ / $g(u) = \sin(u) \Leftarrow g'(u) = \cos(u)$

$\int_1^t \cos(x^2)dx = \frac{1}{2} \left( \left[ \frac{\sin(u)}{\sqrt{u}} \right]_1^{t^2} + \frac{1}{2} \int_1^{t^2} \frac{\sin(u)}{u^{3/2}} du \right)$ $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u^{3/2}} du$ CVA donc CV. Ainsi $\lim_{t\to+\infty} \int_1^t \cos(x^2)dx$

existe et est finie donc $\int_1^{+\infty} \cos(x^2)dx$ CV

3) $u = x^3 \Leftrightarrow x = u^{1/3} \Rightarrow dx = \frac{1}{3} u^{-2/3} du$; $\int_1^{+\infty} x \cos(x^3) dx = \frac{1}{3} \int_1^{+\infty} \frac{1}{u^3} \cos(u) u^{-2/3} du = \frac{1}{3} \int_1^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u^{1/3}} du$

$f(u) = u^{-1/3} \Rightarrow f'(u) = \frac{-1}{3} u^{-4/3}$; $g(u) = \sin(u) \Leftarrow g'(u) = \cos(u)$.

$\int_1^{+\infty} x\cos(x^3)dx = \frac{1}{3} \left( \left[ \frac{\sin(u)}{u^{1/3}} \right]_1^{+\infty} + \frac{1}{3} \int_1^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u^{4/3}} du \right) = \frac{1}{3} \left( -\sin(1) + \frac{1}{3} \int_1^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u^{4/3}} du \right.$

or $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u^{4/3}} du$ CVA donc CV. Ainsi $\int_1^{+\infty} x\cos(x^3)dx$ CV