Généralités sur les espaces préhilbertiens

I 1- Forme bilinéaire

Définition : Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et $\varphi : E\times E \to \mathbb{R}$. On dit que φ est une forme bilinéaire si :

- $\forall x \in E$, $y \mapsto \varphi(x,y)$ linéaire
- $\forall y \in E$, $x \mapsto \varphi(x,y)$ linéaire.

Remarque : une conséquence de la bilinéarité est qu'on peut développer une expression :
$\forall (x,y,z,t) \in E^4$, $\forall (\alpha,\beta,\gamma,\delta) \in \mathbb{R}^4$, on a

$$\varphi(\alpha x+\beta y, \gamma z+\delta t) = \alpha\varphi(x,\gamma z+\delta t) + \beta\varphi(y,\gamma z+\delta t)$$
$$= \alpha\gamma\varphi(x,z) + \alpha\delta\varphi(x,t) + \beta\gamma\varphi(y,z) + \beta\delta\varphi(y,t).$$

Exemple 1 :
Soient $E = C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $\varphi : \begin{cases} E\times E \to \mathbb{R} \\ (f,g) \mapsto \int_0^1 f(t)g(t)dt \end{cases}$
Alors φ est une forme bilinéaire sur E.

Démonstration : Fixons $f \in E$ et montrons que $\varphi_f : g \mapsto \varphi(f,g)$ est linéaire.
Pour tout $(g_1,g_2) \in E^2$ et $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\varphi_f(\lambda g_1+g_2) = \int_0^1 f(t)(\lambda g_1(t)+g_2(t))dt = \lambda\int_0^1 f(t)g_1(t)dt + \int_0^1 f(t)g_2(t)dt.$$
$$= \lambda\varphi_f(g_1)+\varphi_f(g_2) \quad \varphi_f \text{ linéaire}.$$

Demonstration 2 : Fixons $g \in E$ et montrons que $\varphi_g : f \mapsto \varphi(f,g)$ est linéaire.
$\forall (f_1,f_2) \in E^2$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\varphi_g(\lambda f_1+f_2) = \int_0^1 g(t)(\lambda f_1(t)+f_2(t))dt = \lambda\int_0^1 g(t)f_1(t)dt + \int_0^1 g(t)f_2(t)dt$$
$$= \lambda\varphi_g(f_1)+\varphi_g(f_2) \quad \varphi_g \text{ linéaire} \Rightarrow \varphi \text{ bilinéaire}.$$

Exemple 2 :
Soient $E = M_n(\mathbb{R})$ et $\psi : \begin{cases} E\times E \to \mathbb{R} \\ (A,B) \mapsto tr(AB) \end{cases}$

Alors ψ est une forme bilinéaire sur E.
Démonstration
Fixons $A \in E$ et montrons que $\psi_A : B \mapsto \psi(A,B)$ est linéaire.

$$\psi_A(\lambda B_1+B_2) = tr(A(\lambda B_1+B_2)) = tr(\lambda AB_1+AB_2) = \lambda tr(AB_1)+tr(AB_2).$$
$$= \lambda\psi_A(B_1)+\psi_A(B_2) \quad \psi_A \text{ linéaire}.$$

- de même $\forall B \in E$, $A \mapsto \psi(A,B)$ est linéaire.

Donc ψ est donc une forme bilinéaire sur E.

Proposition : Soient E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie n, $\mathcal{B} = (e_1,\dots,e_n)$ une base de E et $\varphi : E\times E \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire sur E. Alors $\exists!\, M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tq : $\forall (x,y) \in E^2$, $\varphi(x,y) = {}^tXMY$
où X et Y sont les coordonnées de x et y dans $\mathcal{B}$. Les éléments de la matrice M sont $m_{ij} = \varphi(e_i,e_j)$.
M s'appelle la matrice de la forme bilinéaire φ relativement à la base $\mathcal{B}$.

11 → b

Espaces préhilbertiens

Exercice n°1 :

1) $E \subset \mathbb{R}_n[X]$

$E \neq \emptyset$ (Le polynome nul est dans E)

Soient $(P,Q) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

Mq $\lambda P + Q \in E$

$(\lambda P+Q)(0) = \lambda \underbrace{P(0)}_{=0} + \underbrace{Q(0)}_{=0} = 0$

$(\lambda P+Q)(1) = \lambda \underbrace{P(1)}_{=0} + \underbrace{Q(1)}_{=0} = 0$

donc $\lambda P + Q \in E$

Soit $P \in E$, alors $P(X) = X(X-1)\underbrace{Q(X)}_{d° \leq 2}$

$P(X) = X(X-1)\sum_{k=0}^{n-2} a_k X^k$

$P(X) = \sum_{k=0}^{n-2} a_k X^{k+1}(X-1) = \sum_{k=0}^{n-2} a_k P_k(X)$

où $P_k(X) = (X-1)X^{k+1}$ donc $P \in \mathrm{Vect}(P_0, \dots, P_{n-2})$

Mq $(P_0, \dots, P_{n-2})$ est libre. Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-2}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ tq $\lambda_0 P_0 + \dots + \lambda_{n-2} P_{n-2} = 0$

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}, \lambda_0 P_0(x) + \dots + \lambda_{n-2} P_{n-2}(x)$. $\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^{n-2} \lambda_k P_k(x) = 0$

donc $\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^{n-2} \lambda_k (x-1)x^{k+1} = 0 = (x-1)\sum_{k=0}^{n-2} \lambda_k x^{k+1}$

donc $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \sum_{k=0}^{n-2} \lambda_k x^{k+1} = 0$

↳ Polynome de degré $\leq n-2$ admettant une infinité de racine, il est donc nul. Ainsi que tous les λ_k sont nuls.

donc $(P_0, \dots, P_{n-2})$ est une base de E d'où $\dim(E) = n-1$

2) Mq ϕ est bilinéaire, symetrique, positive et définie

Soient $(P,Q,R) \in E^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$\phi(P,Q) = -\int_0^1 \left(Q(x)P''(x) + Q''(x)P(x)\right)dx = \phi(P,Q)$ donc ϕ est symetrique

$\phi(\lambda P+Q, R) = -\int_0^1 \left((\lambda P+Q)(x)R''(x) + \underbrace{(\lambda P+Q)''}_{=\lambda P''+Q''}(x)R(x)\right)dx$

↓ linéarité de l'intégrale

$= -\lambda\int_0^1 \left(P(x)R''(x) + P''(x)R(x)\right)dx - \int_0^1 \left(Q(x)R''(x) + R''(x)Q(x)\right)dx$

donc $\phi(\lambda P+Q, R) = \lambda\phi(P,R) + \phi(Q,R)$.

Ainsi ϕ est linéaire à gauche donc linéaire à droite via la symetrie.

Mq $\phi(P,P) \geq 0$, $\phi(P,P) = -\int_0^1 \left(P(x)P''(x) + P''(x)P(x)\right)dx$

$= -2\int_0^1 P(x)P''(x)dx$

$u(x) = P(x) \Rightarrow u'(x) = P'(x)$

$v(x) = P'(x) \Leftarrow v'(x) = P''(x)$

$= -2\left(\underbrace{[P(x)P'(x)]_0^1}_{=0} - \int_0^1 P'^2(x)dx\right)$.

$P \in E$

$\phi(P,P) = 2\int_0^1 \underbrace{(P')^2(x)}_{\geq 0}dx \geq 0$ Ainsi ϕ est positive

Mq ϕ définie. Soit $P \in E$ tq $\phi(P,P) = 0$. Mq $P = 0$, $\phi(P,P) = 0 = 2\int_0^1 \underbrace{(P')^2(x)}_{\geq 0}\,dx$

donc $\forall x \in [0,1]$, $(P')^2(x) = 0$. Donc $\forall x \in [0,1]$, $P'(x) = 0$

Ainsi $\exists k \in \mathbb{R}$, $\forall x \in [0,1]$, $P(x) = k$, or $P(0) = 0 \Rightarrow k = 0$. Ainsi $P = 0$ donc ϕ est défini

Exercice n°2 : 1) A savoir : $(E, \langle , \rangle)$ préhulbertien

$x \in E$, $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle$

$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle = \|x\|^2 + 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2$

$2(1+\|x\|^2)(1+\|y\|^2) - 1 - \|x+y\|^2 = 2(1+\|y\|^2+\|x\|^2+\|x\|^2\|y\|^2) - 1 - \|x\|^2 - 2\langle x,y\rangle - \|y\|^2$

$= 1 + \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|^2\|y\|^2 - 2\langle x,y\rangle = 1 + \|x-y\|^2 + 2\|x\|^2\|y\|^2 \geq 0$.

2) Notons $k = \frac{1}{\|x\|^2}$ et $\ell = \frac{1}{\|y\|^2}$. Mq $\|kx - \ell y\|^2 = k\ell\|x-y\|^2$

$a \in \mathbb{R}$ $\|av\|^2 = \langle av, av\rangle \underset{\substack{\uparrow\\ \text{linéarité}\\ \text{à gauche}}}{=} a\langle v, av\rangle \underset{\substack{\uparrow\\ \text{linéarité}\\ \text{à droite}}}{=} a^2\langle v,v\rangle = a^2\|v\|^2$

$\|kx - \ell y\|^2 = \|kx\|^2 - 2k\ell\langle x,y\rangle + \|\ell y\|^2 = k^2\|x\|^2 - 2k\ell\langle x,y\rangle + \ell^2\|y\|^2$

donc $\|kx - \ell y\|^2 = k - 2k\ell\langle x,y\rangle + \ell$ or $\|x-y\|^2 = k\ell(\|x\|^2 - 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2)$

$= \frac{1}{\cancel{\|x\|^2}} \times \frac{1}{\|y\|^2}\cancel{\|x\|^2} - 2k\ell\langle x,y\rangle + \frac{1}{\|x\|^2} \times \frac{1}{\cancel{\|y\|^2}}\cancel{\|y\|^2} = \ell + k - 2k\ell\langle x,y\rangle$.

donc $\|kx - \ell y\|^2 = k\ell\|x-y\|^2$

3) Soient $(x,y,z) \in E^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

- ϕ est symétrique
- ϕ linéaire à droite (donc linéaire à gauche via symétrie).

$\phi(x, \lambda y + z) = \langle u(x), u(\lambda y + z)\rangle = \langle u(x), \lambda u(y) + u(z)\rangle = \lambda\langle u(x), u(y)\rangle + \langle u(x), u(z)\rangle$

$= \lambda\phi(x,y) + \phi(x,z)$

ϕ positive car $\phi(x,x) = \langle u(x), u(x)\rangle = \|u(x)\|^2 \geq 0$

ϕ définie $\Leftrightarrow (\forall x \in E, \phi(x,x) = 0 \Rightarrow x = 0) \Leftrightarrow (\forall x \in E, \|u(x)\|^2 = 0 \Rightarrow x = 0)$.

ϕ définie $\Leftrightarrow (\forall x \in E, u(x) = 0 \Rightarrow x = 0) \Leftrightarrow \phi$ injective

Exercice n°3 :

1) ϕ_x symétrique. ϕ_x linéaire à gauche car si $(f,g,h) \in E^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$\phi_x(f+\lambda g, h) = \int_0^x (f+\lambda g)(t)h(t)\,dt = \int_0^x f(t)h(t)\,dt + \lambda \int_0^x g(t)h(t)\,dt$

$\phi_x(f+\lambda g, h) = \phi_x(f,h) + \lambda\,\phi_x(g,h)$ donc ϕ bilinéaire via symétrie

Soit $f \in E$,

$\phi_x(f,f) = \int_0^x \underbrace{f^2(t)}_{\geq 0}\,dt \geq 0$ donc ϕ_x positive, ϕ_1 est de plus définie car si $f \in E$ tq $\phi(f,f)=0$

alors $\forall t \in [0,1]$, $f^2(t) = 0$ donc $f = 0$

Rappel : (Cauchy-~~Schw~~ Schwarz)

Soient E un $\mathbb{R}$-ev et φ une forme bilinéaire symétrique et positive.

Alors $\forall (x,y) \in E^2$, $|\varphi(x,y)| \leq \sqrt{\varphi(x,x)}\sqrt{\varphi(y,y)}$ ou encore $(\varphi(x,y))^2 \leq \varphi(x,x)\varphi(y,y)$

2) a) $(\phi_x(f,g))^2 \leq \phi_x(f,f)\,\phi_x(g,g) \leq \left(\int_0^x f^2(t)\,dt\right)\left(\int_0^x g^2(t)\,dt\right)$

Mq si $f \in C^1$ tq $f(0)=0$ alors $\forall x \in [0,1]$, $f^2(x) \leq x \int_0^x f'^2(t)\,dt$

Via Cauchy-Schwarz appliqué à 1 à f', on a :

$(\phi_x(1,f'))^2 \leq \phi_x(1,1)\,\phi_x(f',f')$

$\left(\int_0^x f'(t)\,dt\right)^2 \leq x \int_0^x f'^2(t)\,dt$ donc, comme $f(0)=0$ on a :

$f^2(x) \leq x \int_0^x f'^2(t)\,dt \leq x \int_0^1 f'^2(t)\,dt$ $x \leq 1$

b) En intégrant a), on a :

$\int_0^1 f^2(x)\,dx \leq \int_0^1 x\left(\int_0^1 f'^2(t)\,dt\right)dx \leq \int_0^1 f'^2(t)\,dt \underbrace{\int_0^1 x\,dx}_{1/2}$

donc

$2\int_0^1 f^2(x)\,dx \leq \int_0^1 f'^2(t)\,dt$

Exercice n°4 :

1) Soit $(A,B) \in \mathcal{M}_n^2(\mathbb{R})$. Alors $\varphi(B,A) = tr(B^tA) = tr({}^t(A^tB)) = tr(A^tB) = \varphi(A,B)$.
donc φ symétrique

Soient $(A,B,C) \in \mathcal{M}_n^3(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $\varphi(A+\lambda B, C) = tr((A+\lambda B)^tC) = tr(A^tC) + \lambda tr(B^tC)$

$= \varphi(A,C) + \lambda\varphi(B,C)$

donc φ linéaire à gauche donc bilinéaire via la symétrique

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Mq $\varphi(A,A) = tr(A^t A) \geq 0$

${}^tA = (b_{ij})$ où $b_{ij} = a_{ji}$; $A^tA = (c_{ij})$ où $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}a_{jk}$

$\varphi(A,A) = tr(A^tA) = \sum_{i=1}^n c_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n (a_{ik})^2 \geq 0$ donc φ positive.

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tq $\varphi(A,A) = tr(A^t A) = 0$.

Alors $\forall (i,k) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{ik}^2 = 0$ donc $A = 0$ donc φ est définie

2) Via Cauchy-Schwarz, $|\varphi(A,B)| \leq \underbrace{\sqrt{\varphi(A,A)}}_{\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik}^2} \sqrt{\varphi(B,B)}$

On cherche $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tq

$\varphi(B,B) = n^2 = tr(B^t B)$ $\begin{pmatrix} 1 & — & 1 \\ | & & | \\ 1 & — & 1 \end{pmatrix}$ Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & — & 1 \\ | & & | \\ 1 & — & 1 \end{pmatrix}$

Alors $B^t B = B^2 = \begin{pmatrix} n & — & n \\ | & & | \\ n & — & n \end{pmatrix}$ donc $\varphi(B,B) = tr(B^t B) = n^2$

$\varphi(A,B) = tr(A^t B)$, $(A^t B) = (c_{ij})$ où $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \, 1 = \sum_{k=1}^n a_{ik}$

Donc $\varphi(A,B) = tr(A^t B) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik}$

$(*) \Rightarrow \left| \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} \right| \leq n \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik}^2}$

Exercice n°5:

1) $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x,y \rangle$ d'où l'égalité souhaitée

2) Supposons que f est isométrie. Mq f est injective. Mq $Ker(f) = \{0\}$.

Soit $x \in Ker(f)$, alors $f(x) = 0$ donc $[\|f(x)\| = 0] \xrightarrow{\text{car } f \text{ isometrie}} [\|x\| = 0]$ donc $x = 0$

Ainsi f est injective donc bijective car E dimension finie

(En effet, $dim(E) = \underbrace{dim(Ker(f))}_{=0} + dim(Im(f))$ or $Im(f) \subset E$ donc $Im(f) = E$))

3) $\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que $\forall (x,y) \in E^2$ $\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x,y \rangle$ alors en particulier pour $y = x$ on a

$\underset{\|f(x)\|^2}{\langle f(x), f(x) \rangle} = \underset{\|x\|^2}{\langle x,x \rangle}$ donc f est un isométrie

$\boxed{\Rightarrow}$ Soit $(x,y) \in E^2$ $\langle f(x), f(y) \rangle \overset{1)}{=} \frac{1}{2}\left(\|\overbrace{f(x)+f(y)}^{= f(x+y) \text{ car } f \text{ linéaire}}\|^2 - \|f(x)\|^2 - \|f(y)\|^2\right)$

f isometrie

$= \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right) \overset{1)}{=} \langle x,y \rangle$

4) Soit $x \in E$, Mq $\langle x, f(x) \rangle = 0$

$\langle f^2(x), f(x) \rangle \overset{3)}{=} \langle f(x), x \rangle \overset{f^2 = -id}{=} \langle -x, f(x) \rangle = -\langle x, f(x) \rangle$

car symétrique

Donc $\langle x, f(x) \rangle = 0$

5)a) $\langle f(x) + x, f^2(x) + f(x) \rangle = \underbrace{\langle f(x), f^2(x) \rangle}_{=0} + \|f(x)\|^2 + \langle x, f^2(x) \rangle + \underbrace{\langle x, f(x) \rangle}_{=0} \overset{\text{isometrique}}{=} \|x\|^2 + \langle x, f^2(x) \rangle$

Or $\langle f(x) + x, f^2(x) + f(x) \rangle = \langle f(x) + x, f(f(x) + x) \rangle = 0$ de la forme $\langle v, f(v) \rangle$

Donc $\langle x, f^2(x) \rangle = -\|x\|^2$

Soit $x \in E$:

b) $\|f^2(x)+x\|^2 = \|f^2(x)\|^2 + \|x\|^2 + 2<f^2(x), x> = \|x\|^2 + \|x\|^2 - 2\|x\|^2 = 0$

$\|f^2(x)\|^2 = \|f(x)\|^2$ a)

Donc $f^2(x) + x = 0$

D'où $f^2(x) = -x$, Ainsi $f^2 = -id$

6) Soit $x \in E$, $<f(x)+x, f^2(x)+f(x)> = <f(x)+x, f(f(x)+x)> = 0$ (*)

D'autre part, $<f(x)+x, f(x)+f(x)^2> = \underbrace{<f(x), f^2(x)>}_{=0} + \|f(x)\|^2 + <x, \underbrace{f^2(x)}_{=-x}> + \underbrace{<x, f(x)>}_{=0}$

d'où $\|f(x)\|^2 = \|x\|^2$ via (*) donc f isometrie.

Exercice n°6 : Soient $(x, y, z) \in E^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $<f(\lambda x+y) - (\lambda f(x) + f(y)), z>$

$\overset{\text{par linéarité à gauche}}{=} <f(\lambda x+y), z> - <\lambda f(x) + f(y), z> = -<\lambda x+y, f(z)> - \lambda<f(x), z> - <f(y), z>$

$= -\lambda<x, f(z)> - <y, f(z)> + \lambda<x, f(z)> + <y, f(z)> = 0$.

2) (i) => (ii) On prend $x = y$

Supposons que $\forall (x,y) \in E^2$, $<f(x), y> = -<x, f(y)>$.

Alors en particulier pour $x=y$, on a : $\forall x \in E$, $<f(x), x> = -<x, f(x)> = -<f(x), x>$

propriété d'antisymetrie de f — propriété de symetrie du produit scalaire

Donc $\forall x \in E$, $<f(x), x> = 0$. Mq $f \in \mathcal{L}(E)$,

Soient $(x,y) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, mq $f(\lambda x+y) = \lambda f(x) + f(y)$

1ère méthode : (pas très élegante) :

Via l'hypothèse, $\forall z \in E$, $<f(\lambda x+y) - \lambda f(x) + f(y)), z> = 0$.

En particulier pour $z = f(\lambda x+y) - (\lambda f(x) + f(y))$, on a :

$\|f(\lambda x+y) - (\lambda f(x) + f(y))\|^2 = 0$ donc $f(\lambda x+y) - (\lambda f(x) + f(y)) = 0$ d'où la linéarité de f.

2e methode : (plus élegante).

Comme $\underline{\forall z \in E}$, $<f(\lambda x+y) - (\lambda f(x) + f(y)), z> = 0$, on a :

$f(\lambda x+y) - (\lambda f(x) + f(y)) \in E^\perp$ or $E^\perp = \{0\}$

Donc $f(\lambda x+y) - (\lambda f(x) + f(y)) = 0$ d'où la linéarité de f.

Pour tous les ensembles, leur orthogonal est vectoriel => $\{0\} \subset E^\perp$

ADJ $E^\perp \subset \{0\}$

soit $x \in E^\perp$, alors $\forall y \in E$, $<x, y> = 0$

En particulier, pour $y = x$,

$\|x\|^2 = 0 \Rightarrow x = 0$ □

$E^\perp = \{x \in E, \text{ tq } "x \perp E"\}$.

$E^\perp \subset E$

$\boxed{(ii) \Rightarrow (i)}$ Soient $(x,y) \in E^2$, via le (ii), on a : $<f(x+y), x+y> = 0$.

$\underset{f \text{ linéaire}}{=} <f(x)+f(y), x+y>$. Donc $\underbrace{<f(x),x>}_{=0} + <f(x),y> + <f(y),x> + \underbrace{<f(y),y>}_{=0} = 0$.

D'où $<f(x),y> = - <f(y),x>$.

3) a) Soient $(x, y) \in \mathrm{Ker}(f) \times \mathrm{Im}(f)$. Mq $<x,y> = 0$. Comme $y \in \mathrm{Im}(f)$, il existe $z \in E$ tq $y = f(z)$. Donc $<x,y> = <x, f(z)> = - <f(x), z> = - <0, z> = 0$

b) Soit $(x,y) \in E^2$: $<s(x), y> = <f(f(x)), y> = - <f(x), f(y)> = <x, f(f(y))> = <x, s(y)>$

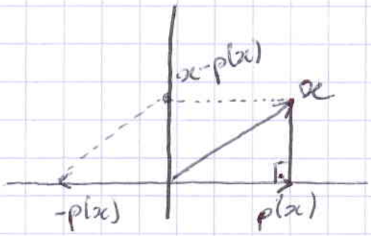
Soit $\lambda \in Sp(s)$. Alors $\exists x \neq 0$ tq $s(x) = \lambda x$

$<s(x), x> = <\lambda x, x> = \lambda \|x\|^2$. Or $<s(x), x> = <f(f(x)), x> = - <f(x), f(x)>$
$= - \|f(x)\|^2$

donc comme $x \neq 0$, $\lambda = \dfrac{-\|f(x)\|^2}{\|x\|^2} \leq 0$.

Rappel:

- p projecteur orthogonal sur F, signifie $p \in \mathcal{L}(E)$, $p^2 = p$, $\mathrm{Im}(p) = F$ et $\mathrm{Ker}(p) = F^\perp$



$\forall x \in E$, $x - p(x) \in F^\perp$

Exercice n° 7 : p projection de F parallèlement à G signifie :

- $p^2 = p$
- $\mathrm{Im}(p) = F$
- $\mathrm{Ker}(p) = G$

En particulier $\forall x \in E$, $x - p(x) \in \mathrm{Ker}(p)$
car $p(x - p(x)) = p(x) - p^2(x) = 0$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que $\forall (x,y) \in E^2$, $<p(x), y> = <x, p(y)>$

Mq $\mathrm{Ker}(p) = (\mathrm{Im}(p))^\perp$:

$\boxed{\subset}$ (H) : Soit $x \in \mathrm{Ker}(p)$. Mq $x \in (\mathrm{Im}(p))^\perp$. Soit $y \in \mathrm{Im}(p)$.

Mq $<x,y> = 0$. $y \in \mathrm{Im}(p) \Rightarrow \exists z \in E$ tq $y = p(z)$. donc $<x,y> = <x, p(z)>$
$= <p(x), z>$.

Par (H), $<p(x), z> = <0, z> = 0$.

$\boxed{\supset}$ De plus, $\dim(\mathrm{Ker}(p)) = \dim(E) - \dim(\mathrm{Im}(p)) = \dim(E) - (\dim(E) - \dim(\mathrm{Im}(p))^\perp)$

Or $\mathrm{Im}(p) \oplus (\mathrm{Im}(p))^\perp \underset{\text{car } E \text{ dim finie}}{=} E$ $\}$ $= \dim(\mathrm{Im}(p))^\perp$

Donc, comme $\mathrm{Ker}(p) \subset (\mathrm{Im}(p))^\perp$, $\mathrm{Ker}(p) = (\mathrm{Im}(p))^\perp$

Si il y a des projections, il faut faire apparaître : $u - p(u)$

1evo : Déterminer une base orthogonale
+
1evo : Projecté
1^ Midterm

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que $\mathrm{Ker}(p) = (\mathrm{Im}(p))^\perp$. Soit $(x,y) \in E^2$

$\langle p(x), y\rangle = \langle p(x), y - p(y) + p(x)\rangle = \overbrace{\langle \underbrace{p(x)}_{\in \mathrm{Im}(p)}, \underbrace{y-p(y)}_{\in \mathrm{Ker}(p) = (\mathrm{Im}(p))^\perp}\rangle}^{=0} + \langle p(x), p(y)\rangle$

$= \langle p(x), y\rangle = \langle p(x), p(y)\rangle$ or $\langle x, p(y)\rangle = \langle x - p(x) + p(x), p(y)\rangle$

$= \overbrace{\langle \underbrace{x - p(x)}_{\in \mathrm{Ker}\, p = (\mathrm{Im}(p))^\perp}, \underbrace{p(y)}_{\in \mathrm{Im}(p)}\rangle}^{=0} + \langle p(x), p(y)\rangle = \langle p(x), p(y)\rangle$ donc $\langle p(x), y\rangle = \langle x, p(y)\rangle$

Exercice n°8 : 1) On a $\{0\} \subset F^\perp$. Mq $F^\perp \subset \{0\}$. Soit $f \in F^\perp$. Alors $\forall g \in F$, $\langle f, g\rangle = 0$ $= \int_0^1 f(t)g(t)\,dt$

Donc en particulier pour $g : t \mapsto tf(t) \in F$, on a $\underbrace{\int_0^1 tf^2(t)\,dt}_{\geq 0} = 0$

donc $\forall t \in [0,1]$, $tf(t)^2 = 0$. Donc $\forall t \in]0,1]$, $f(t) = 0$.

Or f C^0 sur $[0,1]$ donc $\forall t \in [0,1]$, $f(t) = 0$ donc $F^\perp = \{0\}$

2) $F^{\perp\perp} = \{0\}^\perp = E \neq F$.

Exercice n°9 :

P_F projecté orthogonal sur F signifie : $p_F \in \mathcal{L}(E)$, $p_F^2 = p_F$, $\mathrm{Im}(p_F) = F$ et $\mathrm{Ker}(p_F) = F^\perp$.

P_F vérifie la caractérisation suivante :

- $\forall x \in E$, $p_F(x) \in F$
- $\forall x \in E$, $x - p_F(x) \in F^\perp$

$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ x+y \end{pmatrix} ; (x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

P_0 vérifie les conditions suivantes :

- $P_0 \in F$ et - $u - P_0 \in F^\perp$

- $P_0 \in F$ donc $\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tq $P_0 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \alpha+\beta \end{pmatrix}$
- $u - P_0 \in F^\perp$ donc $\begin{cases} \langle u - P_0, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\rangle = 0 \\ \langle u - P_0, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\rangle = 0 \end{cases}$

$\begin{pmatrix} 1-\alpha \\ 1-\beta \\ -\alpha-\beta \end{pmatrix}$

Ainsi $\begin{cases} (1-\alpha).1 + (1-\beta).0 + (-\alpha-\beta).1 = 0 \\ (1-\alpha).0 + (1-\beta).1 + (-\alpha-\beta).1 = 0 \end{cases}$ donc $\begin{cases} 1 - 2\alpha - \beta = 0 \\ 1 - \alpha - 2\beta = 0 \end{cases}$ d'où $\begin{cases} \alpha = \frac{1}{3} \\ \beta = \frac{1}{3} \end{cases}$

donc $P_0 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \alpha+\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$

Exercice n°10. $(1, X, X^2)$ base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. Notons (P_0, P_1, P_2) la base orthogonale cherchée

0,5pts au contrôle

$(P_0 = 1)$; $P_1 = X + \alpha P_0$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ vérifie $\langle P_1, P_0\rangle = 0 \Leftrightarrow \langle X + \alpha P_0, P_0\rangle = 0$

$\Leftrightarrow \langle X, P_0\rangle + \alpha \langle P_0, P_0\rangle = 0 \Leftrightarrow \alpha = -\dfrac{\langle X, P_0\rangle}{\langle P_0, P_0\rangle} = -\dfrac{\langle X, 1\rangle}{\langle 1, 1\rangle} = -\dfrac{\overbrace{\int_{-1}^1 t\,dt}^{\text{impaire} = 0}}{\int_{-1}^1 dt} = 0$ donc $P_1 = X$

$P_2 = X^2 + \beta P_0 + \gamma P_1$ où $(\beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2$ vérifient $\begin{cases} \langle P_2, P_0 \rangle = 0 \\ \langle P_2, P_1 \rangle = 0 \end{cases}$

$\langle P_2, P_0 \rangle = 0 \iff \langle X^2 + \beta P_0 + \gamma P_1, P_0 \rangle = 0 \iff \langle X^2, P_0 \rangle + \beta \langle P_0, P_0 \rangle + \gamma \underbrace{\langle P_1, P_0 \rangle}_{=0} = 0$

donc $\beta = -\dfrac{\langle X^2, P_0 \rangle}{\langle P_0, P_0 \rangle} = -\dfrac{\langle X^2, 1 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} = -\dfrac{\int_{-1}^1 t^2 dt}{\int_{-1}^1 dt} = -\dfrac{2\int_0^1 t^2 dt}{2} = \dfrac{-1}{3}$

$t \mapsto t^2$ paire

$\langle P_2, P_1 \rangle = 0 \iff \langle X^2 + \beta P_0 + \gamma P_1 ; P_1 \rangle = 0$

$\iff \langle X^2, P_1 \rangle + \beta \langle P_0, P_1 \rangle + \gamma \langle P_1, P_1 \rangle = 0$

$\iff \gamma = \dfrac{\langle X^2, P_1 \rangle}{\langle P_1, P_1 \rangle} = -\dfrac{\langle X^2, X \rangle}{\langle X, X \rangle} = -\dfrac{\int_{-1}^1 t^3 dt}{\int_{-1}^1 t^2 dt} = 0$

Donc $P_2 = X^2 + \beta P_0 + \gamma P_1 \iff P_2 = X^2 - \frac{1}{3}$

2) $P_0 \in F$ donc $P_0 = aX + b$.

$X^2 - P_0 \in F^\perp$ donc $\begin{cases} \langle X^2 - P_0, 1 \rangle = 0 \\ \langle X^2 - P_0, X \rangle = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \langle X^2 - aX - b, 1 \rangle = 0 \\ \langle X^2 - aX - b, X \rangle = 0. \end{cases}$

donc $\begin{cases} \int_{-1}^1 (t^2 - at - b) dt = 0 \\ \int_{-1}^1 t(t^2 - at - b) dt = 0 \end{cases}$ donc $\begin{cases} \int_{-1}^1 t^2 dt - a \cancel{\int_{-1}^1 t dt} - b \int_{-1}^1 dt = 0 \\ \cancel{\int_{-1}^1 t^3 dt} - a \int_{-1}^1 t^2 dt - b \cancel{\int_{-1}^1 t dt} = 0 \end{cases}$

$= 0$ car impaire.

3) $\displaystyle \min_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_{-1}^1 (x^2 - ax - b) dx = \min_{Q \in \mathbb{R}_1[X]} \|P - Q\|^2$ où $P = x^2$

$= \|P - P_0\|^2$ où P_0 est le projeté orthogonal de P sur F.

$= \langle P - P_0, P - P_0 \rangle = \langle P, P - P_0 \rangle + \langle P_0, P - P_0 \rangle$ or $P_0 \in \mathbb{R}_1[X]$ et $P - P_0 \in \mathbb{R}_1[X]^\perp$ donc $\langle P_0, P - P_0 \rangle = 0$.

$= \langle P, P - P_0 \rangle = \int_{-1}^1 x^2 (x^2 - \frac{1}{3}) dx$ or $x^2(x^2 - \frac{1}{3})$ est paire donc :

$= 2 \int_0^1 x^2 (x^2 - \frac{1}{3}) dx = 2 \left[\frac{x^5}{5} - \frac{1}{3} \times \frac{x^3}{3} \right]_0^1$

$= 2 \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \right) = 2 \left(\frac{9}{5 \times 9} - \frac{5}{5 \times 9} \right) = 2 \times \frac{4}{45} = \frac{8}{45}$

<u>Théorème</u> : $(E, \langle \rangle)$ préhilbertien réel, F est un sous-ev de E, $x \in E$.

alors $\min_{y \in F} \|x - y\| = \|x - p_A(x)\|$, où $p_F(x)$ est le projeté orthogonal de x sur F.

Exercice n°10 bis : Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire.

$\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\,dt$.

Soient $F = \mathbb{R}_1[X]$ et $P = X^2$.

1) Notons (P_0, P_1, P_2) la base orthogonale cherchée

$P_0 = 1$; $P_1 = X + \alpha P_0$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ tq : $\langle P_1, P_0 \rangle = 0$

$\langle X + \alpha P_0, P_0 \rangle = 0 \iff \langle X, P_0 \rangle + \alpha \langle P_0, P_0 \rangle = 0 \iff \alpha = -\dfrac{\langle X, P_0 \rangle}{\langle P_0, P_0 \rangle}$

$\alpha = -\dfrac{\int_0^1 t\,dt}{\int_0^1 1\,dt} = -\dfrac{\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1}{[t]_0^1} = \dfrac{-1}{2}$. $P_1 = X - \frac{1}{2}$; $P_2 = X^2 + \beta P_0 + \gamma P_1$ $(\beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2$.

tq $\begin{cases} \langle P_2, P_0 \rangle = 0 & (1) \\ \langle P_2, P_1 \rangle = 0 & (2) \end{cases}$

1) $\langle P_2, P_0 \rangle = 0 \iff \langle X^2, P_0 \rangle + \beta \langle P_0, P_0 \rangle + \underbrace{\gamma \langle P_1, P_0 \rangle}_{=0} = 0$

$\langle X^2, P_0 \rangle + \beta \langle P_0, P_0 \rangle = 0$

$\beta = -\dfrac{\langle X^2, P_0 \rangle}{\langle P_0, P_0 \rangle} = -\dfrac{\int_0^1 t^2\,dt}{\int_0^1 1\,dt} = -\left[\dfrac{t^3}{3}\right]_0^1 = \dfrac{-1}{3}$.

2) $\langle P_1, P_0 \rangle = 0 \iff \langle X^2, P_1 \rangle + \beta \langle P_0, P_1 \rangle + \gamma \langle P_1, P_1 \rangle = 0$

$\langle X^2, P_1 \rangle + \gamma \langle P_1, P_1 \rangle = 0$ $\quad \gamma = -\dfrac{\langle X^2, P_1 \rangle}{\langle P_1, P_1 \rangle}$

$\gamma = -\dfrac{\int_0^1 x^2 (x - \frac{1}{2})\,dx}{\int_0^1 (x - \frac{1}{2})^2\,dx} = -\dfrac{\int_0^1 x^3 - \frac{1}{2}x^2\,dx}{\int_0^1 x^2 - x + \frac{1}{4}\,dx}$

$\gamma = -\dfrac{\left[\frac{x^4}{4} - \frac{1}{6}x^3\right]_0^1}{\left[\frac{x^3}{3} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x\right]_0^1} = -\dfrac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{12}} = -1$.

$P_2 = X^2 + \left(\frac{-1}{3}\right) + (-1)\left(X - \frac{1}{2}\right) = X^2 - X + \frac{1}{6}$

2) $P_0 \in F$; $P - P_0 \in F^\perp$ et $P_0 = aX + b$.

$\begin{cases} \langle X^2 - P_0, 1 \rangle = 0 \\ \langle X^2 - P_0, X \rangle = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \int_0^1 x^2 - ax - b\,dx = 0 \\ \int_0^1 x(x^2 - ax - b)\,dx = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \int_0^1 x^2\,dx - \int_0^1 ax\,dx - \int_0^1 b\,dx = 0 \\ \int_0^1 x^3\,dx - \int_0^1 ax^2\,dx - \int_0^1 bx\,dx = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{3} - a\left(\frac{1}{2}\right) - b = 0 \\ \frac{1}{4} - a\left(\frac{1}{3}\right) - b\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{3} - \frac{a}{2} \\ a = 3\left(\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{3} - \frac{a}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{3} - \frac{a}{2} \\ a = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} + \frac{3}{4}a \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{3} - \frac{a}{2} \\ a = \frac{1}{4} - \frac{3}{4}a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -\frac{1}{6} \\ a = 1 \end{cases}$ $\quad P_0 = X - \frac{1}{6}$.

3) $\underset{(a,b)\in\mathbb{R}^2}{\mathrm{Min}} \int_0^1 (x^2 - ax - b)\,dx = \underset{Q\in\mathbb{R}_1[X]}{\mathrm{Min}} \|P - Q\|^2$ où $P = X^2$.

$= \|P - P_0\|^2$ où P_0 est le projeté orthogonal de P sur F.

$= \langle P - P_0, P - P_0 \rangle = \langle P, P - P_0 \rangle - \underbrace{\langle P_0, P - P_0 \rangle}_{=0} = \langle P, P - P_0 \rangle$

$= \int_0^1 x^2 \left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right) dx = \int_0^1 x^4 - x^3 + \frac{1}{6} x^2 dx = \left[\frac{x^4}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{1}{12} x^3\right]_0^1$

$= \frac{1}{5} - \frac{9}{36} + \frac{2}{36} = \frac{1}{5} - \frac{7}{36} = \frac{36}{380} - \frac{35}{180} = \frac{1}{190}$

Exercice n°11 :

1) $x^2 P(x)Q(x)e^{-x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ donc au voisinage de $+\infty$, $P(x)Q(x)e^{-x} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$

or $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ CV donc $\int_1^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x}dx$ CV donc $\int_0^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x}$ CV

$\langle,\rangle$ est symetrique ; $\langle,\rangle$ linéaire à gauche (donc à droite via la symetrie)

car si $(P,Q,R) \in \mathbb{R}_2[x]^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:

$\langle P+\lambda Q, R\rangle = \int_0^{+\infty} (P+\lambda Q)(x)R(x)e^{-x}dx = \int_0^{+\infty} P(x)R(x)e^{-x}dx + \lambda \int_0^{+\infty} Q(x)R(x)e^{-x}dx$

CAR les deux intègrales convergent.

$\langle,\rangle$ est positive car si $P \in \mathbb{R}_2[x]$; $\langle P,P\rangle = \int_0^{+\infty} \underbrace{P^2(x)e^{-x}}\, dx \geq 0$

$\langle,\rangle$ est definie car $\langle P,P\rangle = 0 \iff \forall x \in \mathbb{R}^+, \overset{\geq 0}{P^2(x)e^{-x}} = 0$

$\langle P,P\rangle = 0 \iff \forall x \in \mathbb{R}^+, P(x) = 0$

$\langle P,P\rangle = 0 \iff P = 0$ Pa admet une infinité de racine

2) $I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx$ (En faisant une IPP on abaisse le degré et on peut exprimer I_n en f° de I_{n-1})

$\begin{cases} u(x) = x^n \Rightarrow u'(x) = nx^{n-1} \\ v(x) = -e^{-x} \Leftarrow v'(x) = e^{-x} \end{cases}$

$I_n = -\underbrace{[x^n e^{-x}]_0^{+\infty}}_{=0} + n\int_0^{+\infty} x^{n-1}e^{-x}dx \iff \boxed{I_n = nI_{n-1}}$

$I_{n-1} = (n-1)I_{n-2}$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \Rightarrow I_n = n!\, I_0$ or $I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-x}dx = -[e^{-x}]_0^{+\infty} = 1$.

$I_1 = 1 I_0$

Finalement : $\boxed{I_n = n!}$

3) $P_0 = 1$; $P_1 = X + \alpha P_0 = X + \alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ tq $\langle P_1, P_0\rangle$

$\langle P_1, P_0\rangle = 0 \iff \langle X+\alpha, 1\rangle = 0$

$\langle P_1, P_0\rangle = 0 \iff \langle X, 1\rangle + \alpha\langle 1,1\rangle = 0$

$\langle P_1, P_0\rangle = 0 \iff \alpha = -\frac{\langle X,1\rangle}{\langle 1,1\rangle}$

donc $\alpha = -\frac{\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx}{\int_0^{+\infty} e^{-x}dx} = -\frac{I_1}{I_0} = -\frac{1!}{0!} = -1$

$P_2 = X^2 + \beta P_0 + \gamma P_1$ où $(\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^2$ tq $\langle P_2, P_0\rangle = 0$ et $\langle P_2, P_1\rangle = 0$.

$\langle P_2, P_0\rangle = 0 \iff \langle X^2 + \beta P_0 + \gamma P_1, P_0\rangle = 0$

$\langle P_2, P_0\rangle = 0 \iff \langle X^2, P_0\rangle + \beta\langle P_0, P_0\rangle + \gamma \underbrace{\langle P_1, P_0\rangle}_{=0} = 0$

$\langle P_2, P_0\rangle = 0 \iff \beta = -\frac{\langle X^2, P_0\rangle}{\langle P_0, P_0\rangle} = -\frac{\langle X^2, 1\rangle}{\langle 1,1\rangle}$

donc $\beta = -\frac{\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x}dx}{\int_0^{+\infty} e^{-x}dx} = -\frac{I_2}{I_0} = -2$

$\langle P_2, P_1\rangle = 0 \iff \langle X^2 + \beta P_0 + \gamma P_1, P_1\rangle = 0$

$\langle P_2, P_1\rangle = 0 \iff \langle X^2, P_1\rangle + \beta \underbrace{\langle P_0, P_1\rangle}_{=0} + \gamma\langle P_1, P_1\rangle = 0$

$\langle P_2, P_1\rangle = 0 \iff -\frac{\langle X^2, P_1\rangle}{\langle P_1, P_1\rangle}$

donc $\gamma = -\frac{\langle X^2, X-1\rangle}{\langle X-1, X-1\rangle}$

$\gamma = -\frac{\int_0^{+\infty} x^2(x-1)e^{-x}dx}{\int_0^{+\infty} (x-1)^2 e^{-x}dx}$

$\gamma = -\frac{I_3 - I_2}{I_2 - 2I_1 + I_0} = -\frac{6-2}{2-2+1} = -4$

Ainsi $P_2 = X^2 + \beta P_0 + \gamma P_1 = X^2 - 2 - 4(X-1)$

$\boxed{P_2 = X^2 - 4X + 2}$

4) $P_0 = aX+b$; $X^2 - P_0 \in \mathbb{R}_1[X]^\perp$ donc $\begin{cases} \langle X^2-aX-b, 1\rangle = 0 \\ \langle X^2-aX-b, X\rangle = 0 \end{cases}$ $\int_0^{+\infty}(x^2-ax-b)e^{-x}dx$ $4x - 2$

Ainsi $\begin{cases} I_2 - aI_1 - bI_0 = 0 \\ I_3 - aI_2 - bI_1 = 0 \end{cases}$ donc $\begin{cases} 2-a-b=0 \\ 6-2a-b=0 \end{cases}$ d'où $\begin{cases} a=4 \\ b=-2 \end{cases}$ $\Rightarrow P_0 = 4X-2$.

5) $\underset{(a,b)\in\mathbb{R}^2}{\text{Min}} \int_0^{+\infty}(x^2-ax-b)e^{-x}dx = \underset{Q\in\mathbb{R}_1[x]}{\text{Min}} \|P-Q\|^2$ où $P = X^2 \Leftrightarrow \|P-P_0\|^2$ où $P_0 = 4X-2$

$= \langle P-P_0, P-P_0\rangle = \langle P, P-P_0\rangle - \langle \underbrace{P_0}_{\in \mathbb{R}_1[X]}, \underbrace{P-P_0}_{\in \mathbb{R}_1[X]^\perp}\rangle = \langle P, P-P_0\rangle = \langle X^2, X^2-4X+2\rangle$

$= \int_0^{+\infty} x^2(x^2-4x+2)e^{-x}dx = I_4 - 4I_3 + 2I_2 = 24-24+4 = 4$

(u_n) est de Cauchy si
$\forall \varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall (p,q)\in\mathbb{N}^2$
$p>q\geq N \Rightarrow |u_p - u_q| < \varepsilon$

Correction Contrôle TD1 :

1) (0,5 pts) $\int_a^b f(t)dt$ DV car sinon, en particulier : $\int_a^c f(t)dt$ convergerait d'où une contradiction
(1 pts)
2) φ positive si $\forall x\in E$, $\varphi(x,x)\geq 0$. φ définie si $\forall x\in E$, $\varphi(x,x)=0 \Rightarrow x=0$.

Exercice n°1 : (4 pts)

1) $\int_1^{+\infty}\frac{dt}{\sqrt{t}(1+t^2)}$: $\frac{1}{\sqrt{t}(1+t^2)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}t^2} = \frac{1}{t^{5/2}}$ positif or $\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^{5/2}}$ CV donc $\int_1^{+\infty}\frac{dt}{\sqrt{t}(1+t^2)}$ CV (1 pt)

$\frac{t^\alpha}{1+t^\beta}$

2) $\int_0^{+\infty}\frac{dt}{\sqrt{t}(1+t^2)}$: $\frac{1}{\sqrt{t}(1+t^2)} \underset{0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}$ or $\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{t}}$ CV donc $\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{t}(1+t^2)}$ CV. Donc par 1) $\int_0^{+\infty}\frac{dt}{\sqrt{t}(1+t^2)}$ CV

3) $\int_1^{+\infty}(1-\cos(\frac{1}{t}))dt$: $1-\cos(\frac{1}{t}) = 1-(1-\frac{2}{2t^2}+o(\frac{1}{t^2})) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2t^2}$ positif

or $\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^2}$ CV donc $\int_1^{+\infty}(1-\cos(\frac{1}{t}))dt$ CV (1 pt)

4) $\int_0^1 \sin(\frac{1}{t^2})dt \Rightarrow |\sin(\frac{1}{t^2})| \leq 1$ or $\int_0^1 1dt$ CV donc $\int_0^1 \sin(\frac{1}{t^2})dt$ CVA donc CV.

Exercice n°2 :

$I = \int_1^{+\infty}\frac{dt}{\sqrt{t}(1+t)}$ ICV avec $v=\sqrt{t} \Rightarrow t=v^2 \Rightarrow dt = 2v dv$

$I = \int_1^{+\infty}\frac{2\cancel{v}}{\cancel{v}(1+v^2)}dv = 2[\text{Arctan}(v)]_1^{+\infty} = 2(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{2}$ 2 pts

Exercice n°3 : I PP

$u(t) = \ln(t) \Rightarrow u'(t) = \frac{1}{t}$; $v(t) = t \Leftarrow v'(t) = 1$:

$\int_0^1 \ln(t)dt = \int_x^1 \ln(t)dt = [t\ln(t)]_x^1 - \int_x^1 dt = -x\ln(x) - 1 + x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -1 \Rightarrow \int_0^1 \ln(t)dt$ CV