Suites de fonctions

$(U_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : (U_n) = (U_0, \dots, U_n, \dots)$ avec $U_0 \in \mathbb{R}$, $U_n \in \mathbb{R}$

$(f_n) \in (\mathbb{R}^I)^{\mathbb{N}} : (f_n) = (f_0, \dots, f_n, \dots)$ avec $f_0 \in \mathbb{R}^I$, $f_n \in \mathbb{R}^I$

Exemple :

1) $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n$

[(f_n) converge simplement vers f si sur I : $\forall x \in I$, la suite réelle $(f_n(x))$ CV vers $f(x)$]

càd si :

$\forall x \in I \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N}, \ [n \geq N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon]$

Soit $x \in [0,1]$. Alors $f_n(x) = x^n \to \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$

Ainsi (f_n) CVS sur $[0,1]$ vers $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$

Remarquons que tous les (f_n) sont continus sur $[0,1]$ alors que f est discontinue sur $[0,1]$.
En revanche, (f_n) CVS vers la $f°$ nulle sur $[0,1[$.

2) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{n} \cdot \sin(nx)$

Soit $x \in \mathbb{R}$; alors $f_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ donc (f_n) CVS vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.
$f'(x) = \cos(nx)$. Remarquons que la suite réelle $(f'_n(x))$ n'admet pas de limite quand n tend vers $+\infty$.

Ainsi $\frac{d}{dx}\left(\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x)\right) \neq \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{d}{dx}(f_n(x))\right)$

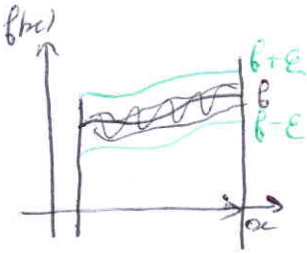
3) $f_n : [0,1[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto n^2 x^n$

Soit $x \in [0,1[$: $f_n(0) = 0$. Si $x \in]0,1[$, $f_n(x) = n^2 x^n = n^2 e^{n \overbrace{\ln(x)}^{<0}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.
donc (f_n) CVS vers la $f°$ nulle sur $[0,1[$. or $\int_0^1 f_n(x)\,dx = n^2 \int_0^1 x^n\,dx$

$= \frac{n^2}{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx \neq \int_0^1 \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x)\,dx$

CVU : (f_n) CVU vers f sur I si $= 0$
$\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, [n \geq N \Rightarrow \forall x \in I, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon]$



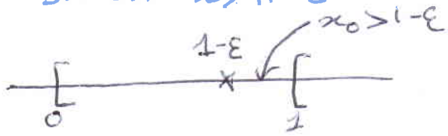
Borne supérieure :

$\sup [0,1[= 1$

Max $[0,1[$ n'existe pas

$\forall x \in A \quad x \leq M - \varepsilon$

$\exists x \in A \quad x > M - \varepsilon$



$M = \sup(A)$ signifie :

1) M est un majorant de A : càd : $\forall x \in A, x \leq M$.

2) $\forall \varepsilon > 0$, $M - \varepsilon$ n'est plus un majorant de A : $\forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in A, x_0 > M - \varepsilon$.

Méthodes pour montrer que (f_n) CVU vers f sur I :

1) On montre que $\sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

2) On montre que qu'il existe une suite réelle (ε_n) tq $\forall x \in I$: $\left| \begin{array}{l} f_n(x) - f(x) < \varepsilon_n \\ \text{où } \varepsilon_n \longrightarrow 0 \end{array} \right.$

Ex: $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$\left| f_n(x) - f(x) \right| = \left| \frac{\sin(nx)}{1+nx} \right| \leq \frac{1}{1+nx} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

$$\frac{1}{1+nx} < \varepsilon \iff 1+nx > \frac{1}{\varepsilon} \iff nx > \frac{1}{\varepsilon} - 1$$

3) $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} ; [n \geqslant N \Rightarrow |\varepsilon_n| < \varepsilon]$.

Méthodes pour montrer que (f_n) ne CVU vers f sur I :

1) On montre que $\sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$

2) On montre qu'il existe $(x_n) \in I^{\mathbb{N}}$ tq $f_n(x_n) - f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$

3) On montre que tous les (f_n) sont continus sur I et que f est discontinue sur I.

4) Si $I = [a,b]$ (où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$), on montre que $\int_a^b f_n(x)\,dx \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} \int_a^b f(x)\,dx$

Suites et Séries de fonctions

Exercice n°1 : 1) Soit $x \in \mathbb{R}$, alors $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc (f_n) CVS vers la f° nulle sur $\mathbb{R}$. Or $\forall x \in \mathbb{R}$, $\left|\frac{\sin(nx)}{n}\right| \leq \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

donc (f_n) CVU vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.

2) Soit $x \in \mathbb{R}^+$, si $x \in [0,1[$, $x^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

si $x = 1$: $x^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, donc $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Ainsi (f_n) CVS vers la f° nulle sur $\mathbb{R}^+$

Si $x \in [0,1]$: $1+x^n \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{1+x^n} \leq 1$ donc $f_n(x) = \frac{x}{n(1+x^n)} \leq \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Si $x \in]1,+\infty[$, $1+x^n \geq x^n \Rightarrow \frac{1}{1+x^n} \leq \frac{1}{x^n}$

donc $f_n(x) = \frac{x}{n(1+x^n)} \leq \frac{x}{nx^n} = \frac{1}{nx^{n-1}} \leq \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Ainsi (f_n) CVU vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}^+$

3) Soit $x \in \mathbb{R}$: $f_n(x) = \frac{x\sqrt{n}}{1+nx^2} = \frac{x}{\frac{1}{\sqrt{n}} + \sqrt{n}x^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

donc (f_n) CVS vers la f° nulle sur $\mathbb{R}$.

$$f_n'(x) = \frac{\sqrt{n}}{(1+nx^2)^2}(1+nx^2 - x.2nx) = \frac{\sqrt{n}}{(1+nx^2)^2}(1-nx^2)$$

	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt{n}}$		$\frac{1}{\sqrt{n}}$		$+\infty$
$f_n'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f_n	0	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	0

$\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| = f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \underset{n\to+\infty}{\not\to} 0$

donc (f_n) ne CV pas uniformement vers la f° nulle sur $\mathbb{R}$.

4) Soit $x \in \mathbb{R}^+$: $f_n(x) = xe^{-nx} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc (f_n) CVS vers la f° nulle sur $\mathbb{R}^+$

$f_n'(x) = e^{-nx}(1-nx)$

	0		$\frac{1}{n}$		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
f_n	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

$\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^+} |f_n(x)| = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{ne} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

donc (f_n) CVU vers la f° nulle sur $\mathbb{R}^+$.

5) Soit $x \in \mathbb{R}$: $|f_n(x)| \leq \frac{1}{1+n^2x^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc (f_n) CVS vers la f° nulle sur $\mathbb{R}$.

or $f_n\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \frac{1}{1+\frac{\pi^2}{4}} \underset{n\to+\infty}{\not\to} 0$

donc (f_n) ne CV pas uniformément vers la f° nulle sur $\mathbb{R}$.

6) Soit $x \in \mathbb{R}$:

$f_n(x) = \frac{x}{x^2+n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc (f_n) CVS vers la f° nulle sur $\mathbb{R}$.

$f_n'(x) = \frac{1}{(x^2+n)^2}(x^2+n-2x^2) = \frac{1}{(x^2+n)^2}(n-x^2)$

	$-\infty$		$-\sqrt{n}$		$\sqrt{n}$		$+\infty$
$f_n'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f_n	0	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	0

donc $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| = f_n(\sqrt{n}) = \frac{\sqrt{n}}{2n} = \frac{1}{2\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Ainsi (f_n) CVU vers la f° nulle sur $\mathbb{R}$.

7) Soit $x \in \mathbb{R}^+$

Alors $f_n(x) = x e^{\frac{x}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$ donc (f_n) CVS sur $\mathbb{R}^+$ vers $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$.

$f_n(x) - f(x) = x(e^{\frac{x}{n}} - 1)$ or $f_n(n) - f(n) = n(e-1) \underset{n\to+\infty}{\not\to} 0$

donc (f_n) ne CV pas uniformement vers f sur $\mathbb{R}^+$

En revanche, (f_n) CVU vers f sur $[0,a]$ où $a \in \mathbb{R}^+$ car $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \underbrace{a(e^{\frac{a}{n}} - 1)}_{\downarrow\, x\to+\infty \atop 0}$.

8) Soit $x \in \mathbb{R}^+$

$f_n(0) = 0$ et si $x \in \mathbb{R}^+_*$, $f_n(x) = n x^2 e^{-nx} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

donc (f_n) CVS vers la f° nulle sur $\mathbb{R}^+$.

$f_n'(x) = ne^{-nx}(2x - nx^2) = nxe^{-nx}(2 - nx)$

x	0		$\frac{2}{n}$		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
f_n	0	↗		↘	0

$\sup_{x\in\mathbb{R}^+} |f_n(x)| = f_n\left(\frac{2}{n}\right) = n \cdot \frac{4}{n^2} e^{-2} = \frac{4}{ne^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

donc (f_n) CVU vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}^+$

9) Soit $x \in [0,1]$.

$f_n(0) = f_n(1) = 0$ et si $x \in]0,1[$, $f_n(x) = nx^n(1-x) = ne^{\overbrace{n\ln(x)}^{<0}}(1-x)$

donc (f_n) CVS vers la f° nulle sur $[0,1]$.

$f_n'(x) = n(nx^{n-1}(1-x) - x^n) = n(nx^{n-1} - (n+1)x^n) = nx^{n-1}(n - (n+1)x)$

x	0		$\frac{n}{n+1}$		1
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
f_n	0	↗		↘	0

$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = n \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) = \frac{n}{n+1} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$

or $\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = e^{n\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)} = e^{-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{-n\left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}$

$= e^{-1+o(1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-1}$

donc $\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{e} \neq 0$.

Ainsi (f_n) ne CV pas uniformement vers la f° nulle sur $[0,1]$.

En revanche, (f_n) CVU vers la f° nulle sur $[0,a]$ si $a \in [0,1[$.

car $\forall x \in [0,a]$, $f_n(x) = nx^n(1-x) \leqslant na^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

22/02 (J)

Exercice n°2

Si $x \in [0,1[$, $x^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Si $x = 1$, $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}$

Si $x \in]1,2]$, $x^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc $f_n(x) = \dfrac{1}{\frac{1}{x^n} + 1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

Ainsi (f_n) CVS sur $[0,2]$ vers $f : [0,2] \to \mathbb{R}$.

$$x \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x \in [0,1[\\ \frac{1}{2} \text{ si } x = 1 \\ 1 \text{ si } x \in]1,2] \end{cases}$$

2) Tous les (f_n) sont sur $[0,2]$ or f discontinue sur $[0,2]$ donc (f_n) ne CVU pas vers f sur $[0,2]$.

— — —

CVU :

- f continue ?
- $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
- $\exists (x_n) \in I^{\mathbb{N}}$ tq $f_n(x_n) - f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\not\to} 0$
- Sup

Exercice n°3 :

1) Soit $x \in [0,1]$: Alors $f_n(x) = \dfrac{ne^{-x} + x^2}{n+x} = \dfrac{e^{-x} + \frac{x^2}{n}}{1 + \frac{x}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-x}$

Ainsi (f_n) CVS sur $[0,1]$ vers $f : [0,1] \to \mathbb{R}$
$x \mapsto e^{-x}$

Soit $x \in [0,1]$: $|f_n(x) - f(x)| = \dfrac{ne^{-x} + x^2}{n+x} - e^{-x} = \dfrac{ne^{-x} + x^2 - ne^{-x} - xne^{-x}}{n+x}$

$= \left| \dfrac{x(x - e^{-x})}{n+x} \right| \leqslant \left| \dfrac{x - e^{-x}}{n} \right|$ or $|x - e^{-x}| \leqslant |x| + |e^{-x}| = x + e^{-x}$

$\leqslant 2$ car $x \geqslant 0$; $-x \leqslant 0$; $e^{-x} \leqslant 1$.

donc $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{2}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc (f_n) CVU vers f sur $[0,1]$

2) Via la CVU, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \int_0^1 e^{-x} dx = -[+e^{-x}]_0^1 = 1 - \frac{1}{e}$

Exercice n°4 :

1) Soit $x \in [-1,1]$.

Alors $f_n(x) = \sin(nx)e^{-nx^2} + \sqrt{1-x^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sqrt{1-x^2}$

2) Soit $x \in [a,1]$.

$|f_n(x) - f(x)| = |\sin(xn)e^{-nx^2}|$ $x \geqslant a \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leqslant e^{-na^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Donc $f_n(x)$ converge uniformément vers f sur $[a,1]$.

3) $f_n(\frac{1}{n}) - f(\frac{1}{n}) = \sin(1)e^{-\frac{1}{n}} \longrightarrow \sin(1) \neq 0$

donc (f_n) ne CV pas uniformément sur $[0,1]$.

Exercice n°5 : 1) Soit $x \in [0,1]$.

$f_n(0)=0$ et si $x \in]0,1]$, $f_n(x) = \frac{nx}{nx+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

Ainsi (f_n) CVS sur $[0,1]$ vers $f : [0,1] \to \mathbb{R}$

$x \longmapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x=0 \\ 1 \text{ sinon} \end{cases}$

2) Soit $x \in [a,1]$, $0 \leq f(x) - f_n(x)$

$= 1 - \frac{nx}{nx+1} = \frac{1}{nx+1} \leq \frac{1}{na+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

donc (f_n) CVU vers f sur $[a,1]$.

Exercice n°6 : 1) Soit $x \in \mathbb{R}^+$

$f_n(0) = 1$; si $x \in]0,1[$ $f_n(x) = \frac{1+\overbrace{x^{2n}}^{<1 \ \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}}{1+x^{2n+1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

Si $x=1$: $f_n(x) = 1$

Si $x>1$: $f_n(x) = \frac{1+x^{2n+1}}{1+x^{2n}} = \frac{\frac{1}{x^{2n}} + x}{\frac{1}{x^{2n}} + 1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$

Ainsi (f_n) CVS sur $\mathbb{R}^+$ vers $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$

$x \longmapsto \begin{cases} 1 \text{ si } x \in [0,1] \\ x \text{ si } x>1 \end{cases}$

2) Soit $x \in]1,+\infty[$, $0 \leq f(x) - f_n(x) = x - \frac{1+x^{2n+1}}{1+x^{2n}} = \frac{x-1}{x^{2n}+1}$

$f(x) - f_n(x) \leq \frac{x-1}{x^{2n}-1} = \frac{1}{1+x+x^2+\dots+x^{2n-1}}$

$\left.\begin{matrix} x>1 \\ \vdots \\ x^{2n-1}>1 \end{matrix}\right\}$

$f(x) - f_n(x) \leq \frac{1}{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Soit $x \in [0,1[$, $0 \leq f(x) - f_n(x) = 1 - \frac{1+x^{2n+1}}{1+x^{2n}} = \frac{x^{2n} - x^{2n+1}}{1+x^{2n}} = \frac{x^{2n}}{1+x^{2n}}(1-x)$

$0 \leq f(x) - f_n(x) \leq x^{2n} \cdot \frac{1-x}{1-x^{2n}} \leq \frac{x^{2n}}{1+x+\dots+x^{2n}} \leq \frac{x^{2n}}{2n x^{2n-1}} \leq \frac{x}{2n} \leq \frac{1}{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

$x^{2n-1} \geq x^{2n-1}$

$x^{2n-2} \geq x^{2n-1}$

$\vdots$

$1 \geq x^{2n-1}$

donc (f_n) CVU vers f sur $]0;1[$ et converge

$f_n(0) - f(0) = 0$ on a CVU sur $[0,1[$.

Exercice n°7 : 1) Soit $t \in \mathbb{R}^+$:

$f_n(t) = \frac{n}{n+t} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ donc (f_n) CVS sur $\mathbb{R}^+$ vers $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$

$t \longmapsto 1$

$g_n(t) = \frac{n}{(n+t)^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc (g_n) CVS sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction nulle.

(f_n) CVU vers f sur I

$\Downarrow$

$\forall (x_n) \in I^{\mathbb{N}}, f_n(x_n) - f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

2) Soit $t \in \mathbb{R}^+$

$h_n(t) = f(t) - f_n(t) = 1 - \frac{n}{n+t} = \frac{t}{n+t}$

1ère méthode : $h_n'(t) = \frac{1}{(n+t)^2} \times (n+t-t) = \frac{n}{(n+t)^2} \geq 0$.

t	0		$+\infty$
$h_n'(t)$		$+$	
h_n	0	$\nearrow$	1

$\sup |h_n(t)| = 1 \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$

donc (f_n) ne CVU vers f sur $\mathbb{R}^+$

15/03 ⑦

2e méthode :

$h_n(n) = \frac{n}{n+n} = \frac{1}{2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ d'où la même conclusion.

Soit $t \in \mathbb{R}^+$: $g_n'(t) = n\left((n+t)^{-2}\right)' = \frac{-2n}{(n+t)^3} < 0$.

t	0	$+\infty$
$g_n'(t)$	$-$	
g_n	$\frac{1}{n}$ $\searrow$	0

$\sup_{t\in\mathbb{R}^+} |g_n(t)| = \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc (g_n) CVU vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}^+$

3) a) $F_n(x) = \int_0^x \frac{n}{n+t}\,dt = n\left[\ln(n+t)\right]_0^x = n\left(\ln(n+x) - \ln(n)\right) = n\ln\left(\frac{n+x}{n}\right) = n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)$ $\to$ DL

b) $F_n(x) = n\left(\frac{x}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = x + o(1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$

donc (F_n) CVS sur $\mathbb{R}^+$ vers $F : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$

Soit $x \in \mathbb{R}^+$: $F_n(x) - F(x) = n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) - x$.

$F_n(n) - F(n) = n\ln(2) - n = n(\ln(2)-1) \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$ cas où $u_n = n$ car (u_n) suite réelle

donc (F_n) ne converge pas uniformément vers F sur $\mathbb{R}^+$

$\int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt$?

1ère méthode :

$f_n(t) = \frac{n}{n+t} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n}{t} > 0$

or $\int_0^{+\infty} \frac{n}{t}\,dt$ DV donc $\int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt$ DV

2e méthode :

$\int_0^x f_n(t)\,dt = F_n(x)$

$= n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$

donc $\int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt$ DV

c) Soit $x \in \mathbb{R}^+$.

$G_n(x) = \int_0^x g_n(t)\,dt = \int_0^x \frac{n}{(n+t)^2}\,dt = -n\left[\frac{1}{n+t}\right]_0^x = -n\left(\frac{1}{n+x} - \frac{1}{n}\right)$

$G_n(x) = 1 - \frac{n}{n-x} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc (G_n) CVS vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}^+$

$G_n(n) = 1 - \frac{n}{n+n} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$ donc (G_n) ne CV pas uniformément sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction nulle.

$\int_0^{+\infty} g_n(t)\,dt$?

1ère méthode :

$g_n(t) = \frac{n}{(n+t)^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n}{t^2}$ or $\int_1^{+\infty} \frac{n}{t^2}\,dt$ CV donc $\int_1^{+\infty} g_n(t)\,dt$ CV donc $\int_0^{+\infty} g_n(t)\,dt$ CV (car il n'y a pas de pb en 0)

2e méthode :

$\int_0^x g_n(t)\,dt = G_n(x) = 1 - \frac{n}{n+x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ donc $\int_0^{+\infty} g_n(t)\,dt$ CV

4) $\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = \int_0^x \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\,dt$?

$\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = \lim_{n\to+\infty} n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) = x$

$\int_0^x \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\,dt = \int_0^x dt = x$ donc on a l'égalité

$\lim_{n\to+\infty} G_n(x) = \lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{n}{n+x}\right) = 0$

$\int_0^x \lim_{n\to+\infty} g_n(t)\,dt = \int_0^x 0\,dt = 0$

d'où l'égalité

__Exercices supplémentaires:__

1) $f_n : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \frac{x}{1+n^2x^2}$

CVS et CVU de (f_n) sur $\mathbb{R}^+$

CVS: $\frac{x}{1+n^2x^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

$f_n'(x) = \frac{1}{(1+n^2x^2)^2}\left(1+n^2x^2 - x\,2n^2x\right)$

$= \frac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2}$

	0	$\frac{1}{n}$	$+\infty$
$f_n'(x)$	$+$	0	$-$
f_n	$0 \nearrow$		$\searrow 0$

$\sup_{x\in\mathbb{R}^+} |f_n(x)| = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\frac{1}{n}}{1+1}$

$= \frac{1}{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

donc (f_n) CVU vers

2) $a \in \mathbb{R}$

$f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$
$x \longmapsto x(1+n^a e^{-nx})$

CVS et CVU de (f_n) sur $\mathbb{R}^+$

~~CVS: $1+n^a e^{-nx}$~~ Cas où $x \in \mathbb{R}^+$

$f_n(0)=0$. Si $x \in \mathbb{R}^+_*$, $f_n(x) = x(1+n^a \underbrace{e^{-nx}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$

Donc (f_n) CVS sur $\mathbb{R}^+$: $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$
$x \longmapsto x$

__Soit $x\in\mathbb{R}^+$:__

$f_n(x) - f(x) = x(1+n^a e^{-nx}) - x = xn^a e^{-nx} = g_n(x)$

Méthode du Sup : 1) Dériver :

$g_n'(x) = n^a e^{-nx}(1-nx)$

2) Tableau de variation

	0	$\frac{1}{n}$	$+\infty$
$g_n'(x)$	$+$	0	$-$
$g_n(x)$	$0 \nearrow$		$\searrow 0$

3) Conclusion

$\sup_{x\in\mathbb{R}^+} |g_n(x)| = g_n\left(\frac{1}{n}\right) = n^a \cdot \frac{1}{n} \cdot e^{-1}$

$= \frac{n^{a-1}}{e} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ ssi $a-1<0$.

Donc (f_n) CVU vers f sur $\mathbb{R}^+$ ssi $a<1$

3) $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 x(1+\sqrt{n}\,e^{-nx})\,dx$?

Comme $a=\frac{1}{2}<1$, $h_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto x(1+\sqrt{n}\,e^{-nx})$

vérifie: (h_n) CVU vers $x\mapsto x$ sur $[0,1]$ donc
$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 h_n(x)\,dx = \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$

Séries de fonctions

Soit $(f_n) \in (\mathbb{R}^{\pm})^{\mathbb{N}}$, $\sum f_n$: série de fonction de terme général f_n.

Exemple : $\sum f_n$ où $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n$

CVS : $\sum f_n$ CVS sur I si $\forall x \in I$, la série numérique $\sum f_n(x)$ CV.

Exemple : $\sum f_n$ où $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n$

Soit $x \in \mathbb{R}$: $\sum_{k=0}^{n} f_k(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k = \begin{cases} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} & \text{si } x \neq 1 \\ n+1 & \text{sinon.} \end{cases}$

$\sum_{k=0}^{n} f_k(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{}$ limite finie

$\Updownarrow$

$|x| > 1$

Ainsi $\sum f_n$ CVS sur $]-1,1[$. (Vers $S :]-1,1[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{1-x}$) ceci est une f°

CVU : Soit $\sum f_n$ CVS vers S (ceci est une f°) sur I. On dit que $\sum f_n$ CVU sur I si :

$(S_n) = \left(\sum_{k=0}^{n} f_k\right)$ CVU sur I.

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b \sum_{k=0}^{n} f_k(x)\,dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx \overset{??}{=} \int_a^b \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)\,dx$$

À savoir

1) $\sum f_n$ CVU sur $I \iff (R_n)$ CVU vers la fonction nulle sur I où $(R_n) = (S - S_n)$

Suite de f° des restes $\quad (R_n) = \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k\right)$

Ce fait est utile en particulier dans le cas des séries alternées vérifiant le critère spécial à cause de la proposition suivante :

Proposition : Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ alternée vérifiant le critère spécial.

$\forall n \in \mathbb{N}, |R_n| \leq |u_{n+1}|$

Exemple :

$\sum f_n$ où $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{(-1)^n}{n+x}$

Critère spécial :
Soit (u_n) une suite alternée
$(|u_n|)$ décroît et tend vers 0, alors (u_n) converge

Soit $x \in \mathbb{R}^+$: alors $\sum \frac{(-1)^n}{n+x}$ est alterné et vérifie le critère spécial car

$\left(\left|\frac{(-1)^n}{n+x}\right|\right) = \left(\frac{1}{n+x}\right)$ décroît et tend vers 0. Ainsi $\sum f_n$ CVS sur $\mathbb{R}^+$. De plus $|R_n(x)| \leq |f_{n+1}(x)| = \frac{1}{n+1+x}$

$x \geq 0$: $\frac{1}{n+1+x} \leq \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Donc (R_n) CVU vers la f° nulle sur $\mathbb{R}^+$. Ainsi $\sum f_n$ CVU sur $\mathbb{R}^+$

Exercice n°8 : 1) Soit $x \in [0,1]$, alors $\sum f_n(x) = \sum (-1)^n x^n$ est alterné et vérifie le critère spécial car $\left(\left|\frac{(-1)^n x^n}{n}\right|\right) = \left(\frac{x^n}{n}\right)$ décroît et tend vers 0.

(vu que $\frac{x^{n+1}}{n+1} \times \frac{n}{x^n} = \frac{n}{n+1} x < 1$). Ainsi f_n CVS sur $[0,1]$.

2) Soit $x \in [0,1]$. On a de plus $|R_n(x)| \leq |f_{n+1}(x)| = \frac{x^{n+1}}{n+1}$

$$|R_n(x)| \leq \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Ainsi (R_n) CVU vers la f° nulle sur $[0,1]$ donc $\sum f_n$ CVU sur $[0,1]$.

3) Soit $x \in [0,1]$

A-t-on $\sum |f_n(x)| = \sum \frac{x^n}{n}$ CV ?? $\sum |f_n(1)| = \sum \frac{1}{n}$ DV. donc $\sum f_n$ ne CV pas absolument $[0,1]$.

Exercice n°9 1) Soit $x \in \mathbb{R}$, $\sum f_n(x) = \sum \frac{1}{n^x}$ CV ssi $x > 1$. donc $\sum f_n$ CVS sur $]1;+\infty[$.
et $\sum f_n$ CVA sur $]1;+\infty[$.

2) Soit $x \in]1;+\infty[$.

aire du rectangle $\frac{1}{k^x} \geq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^x}$

$$R_n(x) = \sum_{n=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^x} \geq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^x} = \int_{n+1}^{+\infty} \frac{dt}{t^x}$$

$$= \frac{1}{1-x}\left[t^{1-x}\right]_{n+1}^{+\infty} \geq \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{(n+1)^{x-1}}$$

or $R_n\left(1+\frac{1}{n}\right) \geq n \cdot \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{n}}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

car $(n+1)^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\ln(n+1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

donc (R_n) ne CV pas uniformément sur $]1;+\infty[$. Ainsi $\sum f_n$ ne converge pas uniformément sur $]1;+\infty[$.

Exercice n°10

1) Soit $x \in \mathbb{R}$:

- Si $x \in \mathbb{R}^-$, $ne^{-nx} \underset{n\to+\infty}{\not\to} 0$ donc $\sum f_n(x)$ DV
- Si $x \in \mathbb{R}^+_*$, $\sum ne^{-nx}$ CV car $ne^{-nx} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Vu que $n^2 \cdot ne^{-nx} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

2) Mq $\sum f_n$ CVN sur $[a,+\infty[$

1ère méthode : Soit $x \in [a;+\infty[$. $|f_n(x)| = ne^{-nx} \leq ne^{-na}$ or $\sum ne^{-na}$ CV.
Vu que $ne^{-na} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc $\sum f_n$ CVN (donc CVU) sur $[a;+\infty[$

2e méthode :

$f_n'(x) = -n^2 e^{-nx} \leq 0$.

x	a	$+\infty$
$f_n'(x)$	$-$	
f_n	$\searrow$	0

$\sup\limits_{x\in[a,+\infty[} |f_n(x)| = f_n(a) = n e^{-na}$.

or $\sum n e^{-na}$ CV car $n e^{-na} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

donc $\sum f_n$ CVN donc CVU sur $[a,+\infty[$. $\sup\limits_{x\in]a,+\infty[} |f_n(x)| = f_n(a)$.

3) Pas de CVU de $\sum f_n$ sur $\mathbb{R}^+$ car pas de CVS.

Sur $\mathbb{R}^+_*$: $f_n'(x) = -n^2 e^{-nx} \leq 0$.

x	0	$+\infty$
$f_n'(x)$	$-$	
f_n	$n \searrow$	0

donc $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^+_*} |f_n(x)| = n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Ainsi (f_n) ne CV pas uniformément vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}^+_*$.

Donc $\sum f_n$ ne CV pas uniformément sur $\mathbb{R}^+_*$. ($\sum f_n$ CVU sur $I \Rightarrow (f_n)$ CVU vers la f° nulle sur I).

Exercice n°11 : (AD CVU $\not\Rightarrow$ CVN)

1) Soit $x \in \mathbb{R}^+$. $\sum \frac{(-1)^n}{n+x}$ est alterné et vérifie le critère spécial car $\left(\left|\frac{(-1)^n}{n+x}\right|\right) = \left(\frac{1}{n+x}\right) \searrow$ et $\to 0$.

donc $\sum \frac{(-1)^n}{n+x}$ CV.

Ainsi $\sum f_n$ CVS sur $\mathbb{R}^+$

Si on enlève (x), c'est faux car on passe d'une série numérique à une série de fonction. Or le critère spécial s'applique aux séries numériques.

2) Comme $\sum f_n(x)$ vérifie le critère spécial (lorsque $x \in \mathbb{R}^+$), on a :
x fixé

$|R_n(x)| \leq |f_{n+1}(x)| = \frac{1}{n+1+x} \leq \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
car sur $\mathbb{R}^+$

donc (R_n) CVU vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}^+$. Ainsi $\sum f_n$ CVU sur $\mathbb{R}^+$

3) $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^+} |f_n(x)| = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^+} \left(\frac{1}{n+x}\right)$

or $\sum \frac{1}{n}$ DV donc $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice n° 12 :

1) Soit $x \in \mathbb{R}^+$: $\sum f_n(0)$ CV et si $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $\sum f_n(x) = \sum x e^{-n^2x^2}$ CV.

car $x e^{-n^2x^2} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. (Vu que $n^2 x e^{-n^2x^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Donc $\sum f_n$ CVS sur $\mathbb{R}^+$.

x	0		$\frac{1}{n\sqrt{2}}$		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
f_n	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

2) $f_n(x) = x e^{-n^2x^2}$; $f_n'(x) = e^{-n^2x^2}(1 - 2n^2x^2)$.

$\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^+} |f_n(x)| = f_n\left(\frac{1}{n\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{n\sqrt{2}} = \cancel{\ldots} = \frac{1}{\sqrt{2e}} \cdot \frac{1}{n}$

or $\sum \frac{1}{n}$ DV car $\sum f_n$ ne CV pas normalement sur $\mathbb{R}^+$

3) $R_n(x)=\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} x e^{-k^2x^2} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} x e^{-k^2x^2} \geq n \cdot x e^{-4n^2x^2}$ 26/03 (13)

nbre de term — terme le plus petit pour $k=2n$.

or $R_n\left(\frac{1}{n}\right) \geq n \cdot \frac{1}{n} \cdot e^{-4} \geq e^{-4} > 0$ ← le Sup ne tend pas vers 0 donc est indéterminé

donc (R_n) ne CV pas uniformément vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}^+$ donc $\sum f_n$ ne cv pas uniformément sur $\mathbb{R}^+$

$\left[\sup_{x\in\mathbb{R}^+} |R_n(x)| \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0\right]$

Exercice n°13:

1) Soit $x\in\mathbb{R}^+$.

. $\sum f_n(0)$ CV (car $=0$)

. $x\in\mathbb{R}^+_*$, $f_n(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{x}{n^2x^2} = \frac{1}{n^2x}$

Or $\sum \frac{1}{n^2}$ CV donc $\sum f_n(x)$ CV. Ainsi $\sum f_n$ CVS sur $\mathbb{R}^+$.

2) $f_n'(x) = \frac{1}{n(1+nx^2)^2} \times (1+nx^2 - x\cdot 2nx) = \frac{1-nx^2}{n(1+nx^2)^2}$

x	0		$\frac{1}{\sqrt{n}}$		$+\infty$
$f_n'(x)$		+	0	−	
f_n	0	↗		↘	0

$\sup_{x\in\mathbb{R}^+} |f_n(x)| = f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1/\sqrt{n}}{1+n\cdot\frac{1}{n}}$

$= \frac{1}{2n\sqrt{n}} = \sup_{x\in\mathbb{R}^+}(f_n(x))$

$\sum \frac{1}{2n\sqrt{n}} = \sum \frac{1}{2n^{3/2}}$ CV donc $\sum f_n$ CVN sur $\mathbb{R}^+$.

3) $\sum f_n$ CVU sur $\mathbb{R}^+$ car $\sum f_n$ CVN sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice n°14:

1) Soit $x\in\mathbb{R}^+$. $|f_n(x)| = \frac{1}{n} e^{-x\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Donc $(|f_n|)$ CVS vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}^+$

2) $\forall x\in\mathbb{R}^+$, $|f_n(x)| = \frac{1}{n} e^{-x\sqrt{n}} \leq \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Donc $(|f_n|)$ CVU vers la f° nulle sur $\mathbb{R}^+$.

Variante: $|f_n(x)|' = \frac{1}{n} e^{-x\sqrt{n}}(-\sqrt{n}) = -\frac{e^{-x\sqrt{n}}}{\sqrt{n}} < 0$

x	0		$+\infty$
$\lvert f_n(x)\rvert'$		−	
$\lvert f_n\rvert$		↘	0

$\sup_{x\in\mathbb{R}^+} |f_n(x)| = f_n(0) = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

$\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ car $\sum \frac{1}{n}$ DV

$\Uparrow \quad \cancel{\Downarrow}$

$\sum \frac{1}{n}$ CV

3) Soit $x\in\mathbb{R}^+$. Etudions la convergence de la série $\sum |f_n(x)| = \sum \frac{1}{n} e^{-x\sqrt{n}}$, Présence d'une expo négative $\Rightarrow \times n^2$ pour ~~cour~~ $o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

$\sum |f_n(0)|$ DV et si $x\in\mathbb{R}^+_*$, $\frac{1}{n} e^{-\sqrt{n}x} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ [Car $n^2 \cdot \frac{1}{n} e^{-x\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$]

or $\sum \frac{1}{n^2}$ CV, donc $\sum \frac{1}{n} e^{-x\sqrt{n}}$ CV. Ainsi $\sum f_n$ CVA sur $\mathbb{R}^+_*$

4) $\sum f_n$ CVA sur $\mathbb{R}^+_* \Rightarrow \sum f_n$ CVS sur $\mathbb{R}^+_*$. De plus $\sum f_n(0) = \sum \frac{(-1)^n}{n}$ CV (série alternée vérifiant le critère spécial). Ainsi $\sum f_n$ CVS sur $\mathbb{R}^+$.

Variante: Soit $x\in\mathbb{R}^+$, étudions la nature de $\sum \frac{(-1)^n}{n} e^{-x\sqrt{n}}$. C'est une série alternée vérifiant le critère spécial. En effet, $\left(\left|\frac{(-1)^n}{n} e^{-x\sqrt{n}}\right|\right) = \left(\frac{1}{n} e^{-x\sqrt{n}}\right)$ CV vers 0 est décroissante car si $f: t \mapsto \frac{1}{t} e^{-x\sqrt{t}}$

car si $f : t \mapsto \frac{1}{t} e^{-x\sqrt{t}}$ alors $f'(t) = \frac{e^{-x\sqrt{t}} \cdot \frac{-x}{2\sqrt{t}}\, t - e^{-x\sqrt{t}}}{t^2}$

$f'(t) = -\frac{e^{-x\sqrt{t}}}{t^2}\left(\frac{x\sqrt{t}}{2}+1\right) \le 0$.

5) Etudions $\sum \sup_{x\in[a,+\infty[} |f_n(x)|$. $\forall x \in [a,+\infty[,\ |f_n(x)| = \frac{1}{n} e^{-x\sqrt{n}} \le \frac{1}{n} e^{-a\sqrt{n}}$

(car $x \ge a \Rightarrow -x\sqrt{n} \le -a\sqrt{n} \Rightarrow e^{-x\sqrt{n}} \le e^{-a\sqrt{n}}$) or $\sum \frac{1}{n} e^{-a\sqrt{n}}$ CV. (car $\frac{1}{n} e^{-a\sqrt{n}} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$)

donc $\sum f_n$ CVN sur $[a,+\infty[$.

6) $\sup_{x\in\mathbb{R}^+} |f_n(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}^+}\left(\underbrace{\overbrace{\frac{1}{n}}^{\text{ne varie pas}} e^{-x\sqrt{n}}}_{\text{inversem. prop à } x}\right) = \frac{1}{n}$ (quand $x=0$)

or $\sum\frac{1}{n}$ DV donc $\sum f_n$ ne CV pas normalement sur $\mathbb{R}^+$.

$\sup_{x\in\mathbb{R}^+_*}|f_n(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}^+_*}\left(\frac{1}{n} e^{-x\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{n}$ donc $\sum f_n$ ne CV pas uniformement sur $\mathbb{R}^*_+$.

7) $\forall x\in\mathbb{R}^+, |R_n(x)| \le |f_{n+1}(x)| = \frac{1}{n+1}\underbrace{e^{-x\sqrt{n+1}}}_{\le 1} \le \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Donc (R_n) CVU vers la f° nulle sur $\mathbb{R}^+$. Ainsi $\sum f_n$ CVU sur $\mathbb{R}^+$

Exercice n°15 :

1)a) Soit $x\in\mathbb{R}^+$ $f_n(x) = \frac{xe^{-nx}}{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Donc (f_n) CVS vers la f° nulle sur $\mathbb{R}^+$

b) $f_n'(x) = \frac{e^{-nx}}{n^2}(1-nx)$.

	0		$\frac{1}{n}$		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
f_n	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

$\Rightarrow \sup_{x\in\mathbb{R}^+}|f_n(x)| = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{n} e^{-1} = \frac{1}{n^3 e} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

donc (f_n) CVU vers la f° nulle sur $\mathbb{R}^+$

c) Soit $x\in\mathbb{R}^+$, $\sum f_n(0)$ CV et si $x\in\mathbb{R}^+_*$, $f_n(x) = \frac{xe^{-nx}}{n^2} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

donc $\sum f_n(x)$ CV. Ainsi $\sum f_n$ CVS sur $\mathbb{R}^+$

d) $\sup_{x\in\mathbb{R}^+}|f_n(x)| = \frac{1}{n^3 e}$ or $\sum\frac{1}{n^3}$ CV donc $\sum f_n$ CVN sur $\mathbb{R}^{+*}$

2a) Soit $x \in\mathbb{R}^+$, $\forall a\in\mathbb{R}$, $f_n(x) = n^a x e^{-nx} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Ainsi (f_n) CVS vers la f° nulle sur $\mathbb{R}^+$

b) $f_n'(x) = n^a e^{-nx}(1-nx)$

$\sup_{x\in\mathbb{R}^+}|f_n(x)| = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = n^{a-1}e^{-1}$. Donc $\sup_{x\in\mathbb{R}^+}|f_n(x)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \iff a-1<0 \iff a<1$

Donc (f_n) CVU vers la f° nulle sur $\mathbb{R}^+$ ssi $a<1$

c) Soit $x \in\mathbb{R}^+$, $\sum f_n(0)$ CV et si $x\in\mathbb{R}^+_*$, $f_n(x) = n^a x e^{-nx} = o\left(\frac{1}{n^a}\right)$ $\forall a\in\mathbb{R}$. Donc $\forall a\in\mathbb{R}$, $\sum f_n$ CVS sur $\mathbb{R}^+$.

d) $\sup_{x\in\mathbb{R}^+}|f_n(x)| = n^{a-1}e^{-1} = \frac{1}{n^{1-a}}\cdot\frac{1}{e}$ or $\sum\frac{1}{n^{1-a}}$ CV $\iff 1-a>1 \iff a<0$.

donc $\sum f_n$ CVN sur $\mathbb{R}^+$ ssi $a<0$.