22/03 (ii)

Exercice n°8 : 1) Soit $x \in [0,1]$, alors $\sum f_n(x) = \sum (-1)^n x^n$ est alterné et vérifie le critère spécial car $\left(\left|\frac{(-1)^n x^n}{n}\right|\right) = \left(\frac{x^n}{n}\right)$ décroît et tend vers 0.

(vu que $\frac{x^{n+1}}{n+1} \times \frac{n}{x^n} = \frac{n}{n+1} x < 1$). Ainsi f_n CVS sur $[0,1]$.

2) Soit $x \in [0,1]$. On a de plus $|R_n(x)| \leq |f_{n+1}(x)| = \frac{x^{n+1}}{n+1}$

$$|R_n(x)| \leq \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Ainsi (R_n) CVU vers la f° nulle sur $[0,1]$ donc $\sum f_n$ CVU sur $[0,1]$.

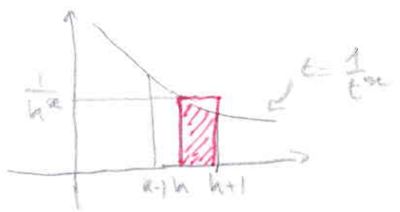
3) Soit $x \in [0,1]$

A-t-on $\sum |f_n(x)| = \sum \frac{x^n}{n}$ CV ?? $\sum |f_n(1)| = \sum \frac{1}{n}$ DV. donc $\sum f_n$ ne CV pas absolument $[0,1]$.

Exercice n°9 : 1) Soit $x \in \mathbb{R}$, $\sum f_n(x) = \sum \frac{1}{n^x}$ CV ssi $x > 1$. donc $\sum f_n$ CVS sur $]1;+\infty[$.

et $\sum f_n$ CVA sur $]1;+\infty[$.

2) Soit $x \in]1;+\infty[$.



aire du rectangle
$$\frac{1}{k^x} \geq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^x}$$

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^x} \geq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^x} = \int_{n+1}^{+\infty} \frac{dt}{t^x}$$

$$= \frac{1}{1-x} \left[t^{1-x}\right]_{n+1}^{+\infty} \geq \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{(n+1)^{x-1}}$$

or $R_n\left(1+\frac{1}{n}\right) \geq n \cdot \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{n}}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$

car $(n+1)^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\ln(n+1)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$.

donc (R_n) ne CV pas uniformément sur $]1;+\infty[$. Ainsi $\sum f_n$ ne converge pas uniformément sur $]1;+\infty[$.

Exercice n°10

1) Soit $x \in \mathbb{R}$:

• Si $x \in \mathbb{R}^-$, $ne^{-nx} \not\xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ donc $\sum f_n(x)$ DV

• Si $x \in \mathbb{R}^+_*$, $\sum ne^{-nx}$ CV car $ne^{-nx} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Vu que $n^2 . ne^{-nx} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

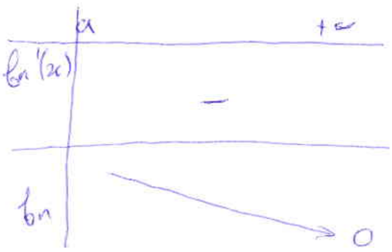
2) Mq $\sum f_n$ CVN sur $[a,+\infty[$

1ère méthode : Soit $x \in [a;+\infty[$. $|f_n(x)| = ne^{-nx} \leq ne^{-na}$ or $\sum ne^{-na}$ CV

Vu que $ne^{-na} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc $\sum f_n$ CVN (donc CVU) sur $[a;+\infty[$

2e méthode :

$f_n'(x) = -n^2 e^{-nx} \leq 0$.



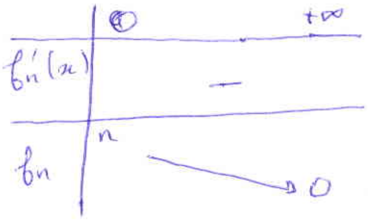
$\sup\limits_{x\in[a,+\infty[} |f_n(x)| = f_n(a) = ne^{-na}$.

or $\sum ne^{-na}$ CV car $ne^{-na} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

donc $\sum f_n$ CVN donc CVU sur $[a,+\infty[$. $\sup\limits_{x\in]a,+\infty[} |f_n(x)| = f_n(a)$

3) Pas de CVU de $\sum f_n$ sur $\mathbb{R}^+$ cars pas de CVS.

Sur $\mathbb{R}^+_*$: $f_n'(x) = -n^2 e^{-nx} \leq 0$.



donc $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^+_*} |f_n(x)| = n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

Ainsi (f_n) ne CV pas uniformément vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}^+_*$.

Donc $\sum f_n$ ne CV pas uniformément sur $\mathbb{R}^+_*$. ($\sum f_n$ CVU sur $I \Rightarrow (f_n)$ CVU vers la f° nulle sur I).

Exercice n°11 : (AD. CVU $\not\Rightarrow$ CVN)

1) Soit $x \in \mathbb{R}^+$. $\sum \frac{(-1)^n}{n+x}$ est alterné et vérifie le critère spécial car $\left(\left|\frac{(-1)^n}{n+x}\right|\right) = \left(\frac{1}{n+x}\right) \searrow$ et $\to 0$.

donc $\sum \frac{(-1)^n}{n+x}$ CV.

Ainsi $\sum f_n$ CVS sur $\mathbb{R}^+$

Si on enlève (x), c'est faux car on passe d'une série numérique à une série de fonction or le critère spécial s'applique aux séries numériques.

2) Comme $\sum f_n(x)$ vérifie le critère spécial (lorsque $x \in \mathbb{R}^+$), on a :

x fixé

$|R_n(x)| \leq |f_{n+1}(x)| = \frac{1}{n+1+x} \underset{\text{car sur } \mathbb{R}^+}{\leq} \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

donc (R_n) CVU vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}^+$. Ainsi $\sum f_n$ CVU sur $\mathbb{R}^+$

3) $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^+} |f_n(x)| = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^+} \left(\frac{1}{n+x}\right)$

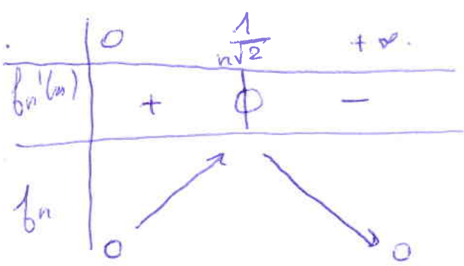
or $\sum \frac{1}{n}$ DV donc $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice n°12 :

1) Soit $x \in \mathbb{R}^+$. $\sum f_n(0)$ CV et si $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $\sum f_n(x) = \sum xe^{-n^2x^2}$ CV.

car $xe^{-n^2x^2} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. (Vu que $n^2xe^{-n^2x^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Donc $\sum f_n$ CVS sur $\mathbb{R}^+$.



2) $f_n(x) = xe^{-n^2x^2}$; $f_n'(x) = e^{-n^2x^2}(1 - 2n^2x^2)$.

$\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^+} |f_n(x)| = f_n\left(\frac{1}{n\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{n\sqrt{2}} = \cancel{\ldots} = \frac{1}{\sqrt{2}e} \cdot \frac{1}{n}$

or $\sum \frac{1}{n}$ DV car $\sum f_n$ ne CV pas normalement sur $\mathbb{R}^+$

3) $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} x e^{-k^2x^2} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} x e^{-k^2x^2} \geq n \cdot x e^{-4n^2x^2}$ 26/03 (13)

nbre de term — terme le plus petit pour $k=2n$.

or $R_n\left(\frac{1}{n}\right) \geq n \cdot \frac{1}{n} \cdot e^{-4} \geq e^{-4} > 0$ ← le Sup ne tend pas vers 0 donc est indéterminé

donc (R_n) ne CV pas uniformément vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}^+$ donc $\sum f_n$ ne cv pas uniformément sur $\mathbb{R}^+$

$\left[\sup_{x\in\mathbb{R}^+} |R_n(x)| \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0\right]$

Exercice n°13 :

1) Soit $x \in \mathbb{R}^+$

- $\sum f_n(0)$ CV (car $=0$)
- $x \in \mathbb{R}^+_*$, $f_n(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{x}{n^2x^2} = \frac{1}{n^2 x}$

Or $\sum \frac{1}{n^2}$ CV donc $\sum f_n(x)$ CV.
Ainsi $\sum f_n$ CVS sur $\mathbb{R}^+$

2) $f_n'(x) = \frac{1}{n(1+nx^2)^2} \times (1 + nx^2 - x \cdot 2nx) = \frac{1-nx^2}{n(1+nx^2)^2}$

x	0		$\frac{1}{\sqrt{n}}$		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
f_n	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

$\sup_{x\in\mathbb{R}^+} |f_n(x)| = f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1/\sqrt{n}}{1 + n\cdot\frac{1}{n}}$

$= \frac{1}{2n\sqrt{n}} = \sup_{x\in\mathbb{R}^+} |f_n(x)|$

$\sum \frac{1}{2n\sqrt{n}} = \sum \frac{1}{2n^{3/2}}$ CV donc $\sum f_n$ CVN sur $\mathbb{R}^+$.

3) $\sum f_n$ CVU sur $\mathbb{R}^+$ car $\sum f_n$ CVN sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice n°14 :

1) Soit $x \in \mathbb{R}^+$. $|f_n(x)| = \frac{1}{n} e^{-x\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc $(|f_n|)$ CVS vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}^+$

2) $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $|f_n(x)| = \frac{1}{n} e^{-x\sqrt{n}} \leq \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc $(|f_n|)$ CVU vers la f° nulle sur $\mathbb{R}^+$

Variante : $|f_n^*(x)|' = \frac{1}{n} e^{-x\sqrt{n}} (-\sqrt{n}) = -\frac{e^{-x\sqrt{n}}}{\sqrt{n}} \leq 0$

x	0		$+\infty$
$\lvert f_n^*(x)\rvert'$		$-$	
$\lvert f_n \rvert$		$\searrow$	0

$\sup_{x\in\mathbb{R}^+} |f_n(x)| = f_n(0) = \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

$\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
$\Uparrow$ $\not\Downarrow$ car $\sum \frac{1}{n}$ DV.
$\sum \frac{1}{n}$ CV

3) Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Etudions la convergence de la série

$\sum |f_n(x)| = \sum \frac{1}{n} e^{-x\sqrt{n}}$, Présence d'une expo négative $\Rightarrow \times n^2$ pour ~~com~~ $o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

$\sum |f_n(0)|$ DV et si $x \in \mathbb{R}^+_*$, $\frac{1}{n} e^{-\sqrt{n}x} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ $\left[\text{Car } n^2 \cdot \frac{1}{n} e^{-x\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0\right]$

or $\sum \frac{1}{n^2}$ CV donc $\sum \frac{1}{n} e^{-x\sqrt{n}}$ CV. Ainsi $\sum f_n$ CVA sur $\mathbb{R}^+_*$

4) $\sum f_n$ CVA sur $\mathbb{R}^+_* \Rightarrow \sum f_n$ CVS sur $\mathbb{R}^+_*$. De plus $\sum f_n(0) = \sum \frac{(-1)^n}{n}$ CV (série alternée vérifiant le critère spécial). Ainsi $\sum f_n$ CVS sur $\mathbb{R}^+$.

Variante : Soit $x \in \mathbb{R}^+$, étudions la nature de $\sum \frac{(-1)^n}{n} e^{-x\sqrt{n}}$. C'est une série alternée vérifiant le critère spécial. En effet, $\left(\left|\frac{(-1)^n}{n} e^{-x\sqrt{n}}\right|\right) = \left(\frac{1}{n} e^{-x\sqrt{n}}\right)$ CV vers 0 est décroissante car si $f : t \mapsto \frac{1}{t} e^{-x\sqrt{t}}$

car si $f : t \mapsto \frac{1}{t} e^{-x\sqrt{t}}$ alors $f'(t) = \dfrac{e^{-x\sqrt{t}} \cdot \frac{-x}{2\sqrt{t}} t - e^{-x\sqrt{t}}}{t^2}$

$f'(t) = -\dfrac{e^{-x\sqrt{t}}}{t^2}\left(\dfrac{x\sqrt{t}}{2} + 1\right) \leq 0$. $\cancel{u_n = f(n)}$

5) Etudions $\sum \| \sup_{x \in [a,+\infty[} |f_n(x)|$. $\forall x \in [a,+\infty[, |f_n(x)| = \frac{1}{n} e^{-x\sqrt{n}} \leq \frac{1}{n} e^{-a\sqrt{n}}$

(car $x \geq a \Rightarrow -x\sqrt{n} \leq -a\sqrt{n} \Rightarrow e^{-x\sqrt{n}} \leq e^{-a\sqrt{n}}$) or $\sum \frac{1}{n} e^{-a\sqrt{n}}$ CV. (car $\frac{1}{n} e^{-a\sqrt{n}} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$)

donc $\sum f_n$ CVN sur $[a,+\infty[$.

6) $\sup_{x \in \mathbb{R}^+} |f_n(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}^+} \left(\underbrace{\overbrace{\frac{1}{n}}^{\text{ne varie pas}} e^{-x\sqrt{n}}}_{\text{inversem. prop à } x}\right) = \frac{1}{n}$ (quand $x = 0$)

or $\sum \frac{1}{n}$ DV donc $\sum f_n$ ne CV pas normalement sur $\mathbb{R}^+$.

$\sup_{x \in \mathbb{R}^+_*} |f_n(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}^+_*} \left(\frac{1}{n} e^{-x\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{n}$ donc $\sum f_n$ ne CV pas uniformement sur $\mathbb{R}^*_+$.

7) $\forall x \in \mathbb{R}^+, |R_n(x)| \leq |f_{n+1}(x)| = \frac{1}{n+1} \underbrace{e^{-x\sqrt{n+1}}}_{\leq 1} \leq \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$. Donc (R_n) CVU vers la f° nulle sur $\mathbb{R}^+$. Ainsi $\sum f_n$ CVU sur $\mathbb{R}^+$

Exercice n°15 :

1) a) Soit $x \in \mathbb{R}^+$ $f_n(x) = \dfrac{xe^{-nx}}{n^2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$. Donc (f_n) CVS vers la f° nulle sur $\mathbb{R}^+$

b) $f_n'(x) = \dfrac{e^{-nx}}{n^2}(1 - nx)$.

	0		$\frac{1}{n}$		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
f_n	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

$\Rightarrow \sup_{x \in \mathbb{R}^+} |f_n(x)| = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{n} e^{-1} = \frac{1}{n^3 e} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

donc (f_n) CVU vers la f° nulle sur $\mathbb{R}^+$

c) Soit $x \in \mathbb{R}^+$, $\sum f_n(0)$ CV et si $x \in \mathbb{R}^+_*$, $f_n(x) = \dfrac{xe^{-nx}}{n^2} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

donc $\sum f_n(x)$ CV. Ainsi $\sum f_n$ CVS sur $\mathbb{R}^+$

d) $\sup_{x \in \mathbb{R}^+} |f_n(x)| = \frac{1}{n^3 e}$ or $\sum \frac{1}{n^3}$ CV donc $\sum f_n$ CVN sur $\mathbb{R}^{+*}$

2a) Soit $x \in \mathbb{R}^+$, $\forall a \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = n^a x e^{-nx} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$. Ainsi (f_n) CVS vers la f° nulle sur $\mathbb{R}^+$

b) $f_n'(x) = n^a e^{-nx}(1 - nx)$

$\sup_{x \in \mathbb{R}^+} |f_n(x)| = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = n^{a-1} e^{-1}$. Donc $\sup_{x \in \mathbb{R}^+} |f_n(x)| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \iff a - 1 < 0 \iff a < 1$

Donc (f_n) CVU vers la f° nulle sur $\mathbb{R}^+$ ssi $a < 1$.

c) Soit $x \in \mathbb{R}^+$, $\sum f_n(0)$ CV et si $x \in \mathbb{R}^+_*$, $f_n(x) = n^a x e^{-nx} = o\left(\frac{1}{n^a}\right)$ $\forall a \in \mathbb{R}$. Donc $\forall a \in \mathbb{R}$, $\sum f_n$ CVS sur $\mathbb{R}^+$.

d) $\sup_{x \in \mathbb{R}^+} |f_n(x)| = n^{a-1} e^{-1} = \frac{1}{n^{1-a}} \cdot \frac{1}{e}$ or $\sum \frac{1}{n^{1-a}}$ CV $\iff 1 - a > 1 \iff a < 0$.

donc $\sum f_n$ CVN sur $\mathbb{R}^+$ ssi $a < 0$.