Equations de Maxwell

- C'est des équat° locales (valables en tt point et ds n'importe quel milieu)
- Elles résument toutes les lois d'électromagnétisme en exprimant les vecteurs chp électriq $(\vec{E}, \vec{B})$ en fonct° de leurs grandeurs sources $(\rho, \vec{J})$

$$\begin{cases} \rho = \text{densité de charge } (C.m^{-3}) \\ \vec{J} = \text{vecteur densité de courant } (A.m^{-2}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} div(\vec{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon} & \text{Gauss - Maxwell} \\ div(\vec{B}) = 0 & \text{propriété de B} \\ \vec{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \text{Faraday - Maxwell} \\ \vec{rot}(\vec{B}) = \mu \vec{J_S} + \mu \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} & \text{Ampère - Maxwell} \end{cases}$$

(1) $\mathrm{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon}$ (Gauss - Maxwell) ; ρ = densité de charge volumique en $C.m^{-3}$

(2) $\mathrm{div}(\vec{B}) = 0$ (Propriété de $\vec{B}$)

(3) $\vec{rot}(\vec{E}) = \frac{-\partial B}{\partial t}$ (Faraday - Maxwell)

(4) $\vec{rot}(\vec{B}) = \mu \vec{J_s} + \mu\varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ (Ampère - Maxwell)

Montre que $\vec{E} \perp \vec{B}$

<u>Remarque:</u> Dans le vide (ou dans le milieu air) | $\rho = 0$ (pas de densité de charges locale) ; $J = 0$ (pas de courant) ; $\mu = \mu_0$; $\varepsilon = \varepsilon_0$

$\mathrm{div}(\vec{E}) = 0$

$\mathrm{div}(\vec{B}) = 0$

$\vec{rot}(\vec{E}) = \frac{-\partial \vec{B}}{\partial t}$

$\vec{rot}(\vec{B}) = \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

2) Equations de propagation de $\vec{E}$ et de $\vec{B}$

On donne l'identité remarquable : $\Delta\vec{u} = \vec{grad}(\mathrm{div}(\vec{u})) - \vec{rot}(\vec{rot}(\vec{u}))$

<u>$\vec{u} = \vec{E}$</u>

$\Delta\vec{E} = \vec{grad}(\underbrace{\mathrm{div}(\vec{E})}_{=0\ (1)}) - \vec{rot}(\underbrace{\vec{rot}(\vec{E})}_{\frac{-\partial \vec{B}}{\partial t}\ (3)}) = \vec{rot}\left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}(\underbrace{\vec{rot}(\vec{B})}_{\frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\ (4)})$

$\Delta\vec{E} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$ $\qquad \Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$

<u>$\vec{u} = \vec{B}$</u>

$\Delta\vec{B} = \vec{grad}(\underbrace{\mathrm{div}(\vec{B})}_{=0\ (2)}) - \vec{rot}(\underbrace{\vec{rot}(\vec{B})}_{\frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\ (4)}) = \vec{0} - \frac{1}{c^2}\vec{rot}\left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$

$\Delta\vec{B} = -\frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial}{\partial t}(\underbrace{\vec{rot}(\vec{E})}_{(3)}) = -\frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$

$\Delta\vec{B} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}$

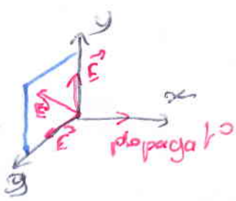
3) Ondes planes et propriétés (dans l'air)

<u>OEM:</u> propagation sur l'axe $\vec{Ox}$

$E(x,t)$

E transverse

$\Leftrightarrow E \perp$ axe de propagation



$\mathrm{div}(\vec{E}) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial E_x}{\partial x} + \underbrace{\frac{\partial E_y}{\partial y}}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial E_z}{\partial z}}_{=0} = 0$

$\frac{\partial E_x}{\partial x} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cancel{E_x\ cste} \\ E_x = 0 \end{cases}$

$\vec{E}(x,t) = \begin{cases} 0 \\ E_y(x,t) \\ E_z(x,t) \end{cases}$ (Champs transversal) de m̂ pour $\vec{B}$

Comme $\mathrm{div}(\vec{B}) = 0 \Rightarrow \vec{B}$ transverse et $\vec{B} \perp$ à l'axe de propagat°

CCL : 1ère propriété d'ondes planes dans l'air. ($\vec{E}$ et $\vec{B}$ transverses)

2e propriété d'OEMP (air) : $\vec{E} \perp \vec{B}$ (donnée par $\vec{\mathrm{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$)

3e propriété : $\|\vec{E}\| = c\|\vec{B}\|$ (donnée par $\mathrm{rot}(\vec{B}) = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$)

célérité des OEM dans l'air : $\frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$

4e propriété d'OEMP (air) : ($\vec{E}$, $\vec{B}$, axe de propagation) forment un trièdre direct (donnée par $\mathrm{rot}(\vec{E})$ ou $\mathrm{rot}(\vec{B})$)

pouce   index   majeur

<u>Exemple d'application</u> : Soit une OEMP (air) de champ $\vec{E}(y,t) = E_0 \cos(ky - \omega t)\,\vec{e_x}$

Trouver $\vec{B}$ qui forme une OEM avec $\vec{E}$.

Représenter $\vec{E}$ et $\vec{B}$

$$\boxed{\vec{B}(y,t) = -B_0 \cos(ky - \omega t)\,\vec{e_3}}$$

$\Rightarrow$ E transverse