Serie 9 : Opérateurs d'analyse vectorielle

Opérateurs :

1) Gradient

Soit $f(x,y,z)$, la différentielle de la fonction f : df

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

$\frac{\partial f}{\partial x}$: dérivée partielle de f par rapport à x (y,z cstes)

$\frac{\partial f}{\partial y}$: dérivée partielle de f par rapport à y (x,z csts)

$\frac{\partial f}{\partial z}$: dérivée partielle de f par rapport à z (y,z csts)

cas d'une seule variable x : si $f(x) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$

$\Rightarrow df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + 0 + 0 \Rightarrow df = \frac{\partial f}{\partial x}dx$

$\Rightarrow \underbrace{\frac{df}{dx}}_{\text{dérivée totale}} = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}}_{\text{dérivée partielle}}$

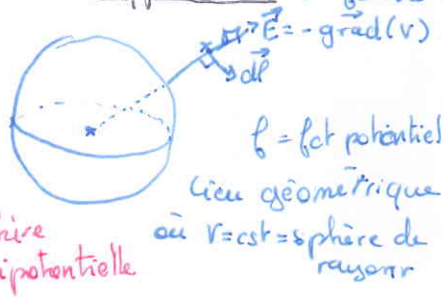
CCL : lorsque f ne dépend que d'une seule variable x, alors la dérivée totale est égale à la dérivée partielle.

Soit $\vec{dl} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$; $\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix}}_{\vec{grad}} (f) \Rightarrow \boxed{df = \vec{grad}(f) . \vec{dl}}$ $\left(df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz\right)$

fct scalaire

Le gradient ne s'applique que à des fonctions et donne un vecteur.

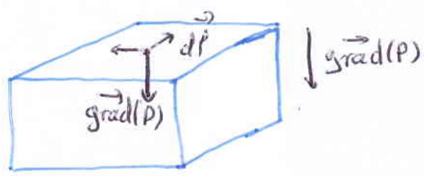
Exemple d'application : si $f = cste \Rightarrow df = 0 \Rightarrow \vec{grad}(f) \perp \vec{dl} \Rightarrow df = \vec{grad}(f).\vec{dl} = 0$.



f = fct potentiel V

Lieu géométrique où $V = cst$ = sphère de rayon r

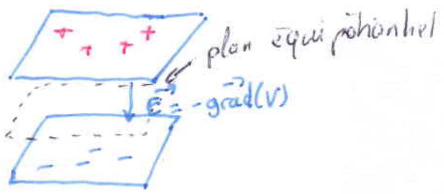
sphère equipotentielle



$\vec{grad}(P) \perp$ plan (xoy)

$\Rightarrow P = cste$ dans cette surface (xoy)

$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(f)$



12/03

2) Divergent (souvent appliqué au vecteur $\vec{v}$)

Rappel : $\overrightarrow{grad}(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{u_x} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{u_y} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{u_z} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}(f) = \vec{\nabla}(f)$

$\vec{\nabla}$: opérateur "nabla" qui permet la mesure de variation d'une f° qcq f.
f = pot V, temp T...

"div" est l'application de l'opérateur "nabla" en produit scalaire à un vecteur $\vec{V}$

$$\boxed{div(\vec{V}) = \vec{\nabla}.\vec{V}} \neq \vec{V}.\vec{\nabla}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} V_x(x,y,z) \\ V_y(x,y,z) \\ V_z(x,y,z) \end{pmatrix} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

= fonction scalaire.

div s'applique à un vecteur et le résultat donne un scalaire.

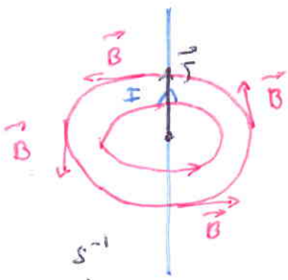
3) Opérateur rotationnel : $\vec{rot}$

C'est l'application de l'opérateur "nabla" $\vec{\nabla}$ en produit vectoriel à un vecteur $\vec{V}$.

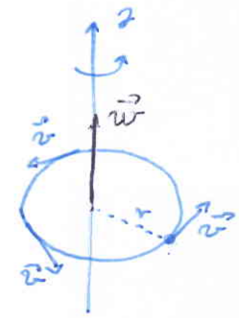
$$\vec{rot}(\vec{V}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{V} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} V_x(x,y,z) \\ V_y(x,y,z) \\ V_z(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \\ \frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \\ \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Exemple : $\vec{rot}(\vec{V_1}) = \vec{V_2}$

"V_1 tourne autour de V_2"



$[\vec{rot}] = m^{-1}$



$v = r\dot{\theta} = r\omega$ (ω : vitesse angulaire)

$\vec{rot}(\vec{v}) = \frac{1}{2}\vec{\omega}$ = tourne autour de $\vec{\omega}$

$\underset{m.s^{-1}}{v} = \frac{dx}{dt}$ (s^{-1}, m) ; $[\Delta] = m^{-2}$; $[\frac{\partial}{\partial t}] = s^{-1}$; $[\frac{\partial^2}{\partial t^2}] = s^{-2}$; $[\vec{rot}] = m^{-1}$

4) Opérateur laplacien noté : Δ

- s'applique à une fonction scalaire donne une fonction scalaire : $\Delta f = f°$
- s'applique à un vecteur donne un vecteur : $\Delta\vec{U}$ = vect.