complex (31/10)

Preuves de complexité par récurrence

H_n : « ....n »

$\begin{cases} H_1 \text{ est vraie} \\ \text{si } H_{n-1} \text{ est vraie alors } H_n \text{ est vraie} \end{cases}$

$\Longrightarrow$ $\forall n \geq 1$, H_n est vraie

Méthode pour $O(n)$ $\Omega(n)$

> Pour prouver $T(n) = \underset{\Omega}{O}(f(n))$
>
> 1. poser l'hypothèse.
>
> H_n : « $T(n) \underset{\geq}{\leq} c f(n)$ »
>
> où $c > 0$.
>
> 2. Montrer que H_{n_0} est vraie. (cas de base)
>
> 3. Supposer $H_{n_0}, H_{n_1}, \dots, H_{n-1}$ et montrer que H_n est vraie
>
> 4. Conclure que $\forall n \geq n_0$, H_n vraie
>
> $\forall n \geq n_0$, $T(n) \overset{\geq}{\leq} c f(n)$
>
> donc $T(n) = \underset{\Omega}{O}(f(n))$

Pour $\Theta(n)$ faire $O(n)$ puis $\Omega(n)$ car $\Theta(n)$ est l'intersection des deux

Ex 1 :

$$T(n) \leq \begin{cases} \Theta(1) \text{ si } n=1 \\ T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + \Theta(n) \text{ si } n > 1 \end{cases}$$

Intuition : $T(n) = O(\log n)$?

H_n : « $T(n) \leq c \log_2 n$ »

H_1 : $T(1) \leq \Theta(1) \leq c \log_2(1) = 0$
FAUX

H_2 : $T(2) \leq T(1) + \Theta(1) = \Theta(1) \leq c \log_2 2 = c$
VRAIE — existe par déf de $\Theta(1)$

H_3 : $T(3) \leq T(1) + \Theta(1) = \Theta(1) \leq c \log_2 3$
VRAIE

Cas général : Pour $n \geq 4$, on suppose $H_2, H_3, \dots, H_{n-1}$

$T(n) \leq T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + \Theta(1)$

$H_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$: $T(n) \leq c \log_2(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + \Theta(1)$

$T(n) \leq c \log_2(\frac{n}{2}) + \Theta(1)$

$T(n) \leq c \log_2 n - \underbrace{(c - \Theta(1))}_{\geq 0 \text{ si } c \text{ assez gd pour dominer } \Theta(1)}$

$[c \log_2(\frac{n}{2}) = c \log_2 n - c \underbrace{\log_2 2}_{=1}]$

$T(n) \leq c \log_2(n)$

H_n est vraie

On a montré $\forall n \geq n_0$, $T(n) \leq c \log_2 n$

donc $T(n) = O(\log n)$

Ex 2 :

$$T(n) = \begin{cases} 1 \\ 2T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + 1 \end{cases}$$

Intuition : $T(n) = \Theta(n)$?

On essaye de montrer $T(n) = O(n)$ par rec

H_n : « $T(n) \leq cn$ »

H_1 : $T(1) = 1 \leq c$ VRAIE

H_2 : $T(2) = 2T(1) + 1 = 3 \leq c$ VRAIE

Cas général : Pour $n \geq 3$, on suppose $H_1, H_2, \dots, H_{n-1}$

$T(n) = 2T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + 1$

$H_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$: $T(n) \leq 2c \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$

$T(n) \leq cn + 1$ ← Bloqué $\Rightarrow$ Hypothèse pas assez précise.

H_n : « $T(n) \leq cn - 1$ »

H_1 : $T(1) = 1 \leq c - 1$ ✓

H_2 $T(2) = 3 \leq c2 - 1$ ✓

$\forall n \geq 3$, on supp $H_1, H_2, \dots H_{n-1}$

$$T(n) \leq 2T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + 1$$

$H_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$

$$T(n) \leq 2\left(c\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1\right) + 1$$

$\lfloor x \rfloor \leq x$

$$T(n) \leq 2\left(\frac{cn}{2} - 1\right) + 1$$

$$T(n) \leq cn - 2 + 1$$

$$T(n) \leq cn - 1 \quad H_n \text{ vraie}$$

$$\Rightarrow T(n) = O(n)$$

Sélection de la valeur de rang k
(= k-ième plus petite valeur)

rang 0 = min

rang n-1 = max

rang $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ = médiane

$\boxed{2\ 3\ 4\ 7\ 9\ 2\ 5\ 7}$

On veut $k = 4$

Selection(A, b, e, k) { Quick Select vrai nom

```
if e - b = 1
    return A[b]
else
    m ← partition(A, b, e)
    ℓ ← m - b
    if k < ℓ
        return Selection(A, b, m, k)
    else return Selection(A, m, ℓ, k-ℓ)
```

Meilleur cas :

$$T(1) = \Theta(1)$$
$$T(n) = \Theta(n) + T\left(\frac{n}{2}\right)$$
$$T(n) = \Theta(n)$$

Pire cas:

$$T(1) = \Theta(1)$$
$$T(n) = \Theta(n) + T(n-1)$$
$$T(n) = \Theta(n^2)$$

Cas moyen:

$$T(n) \leq \Theta(n) + \underbrace{\frac{1}{n-1}\sum_{\ell=1}^{n-1}}_{\text{moy. sur tous les } \ell \text{ possibles.}} \max(T(\ell), T(n-\ell))$$

$$T(n) \leq \Theta(n) + \frac{2}{n-1}\sum_{\ell=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^{n-1} T(\ell)$$

$$\sum_{\ell=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^{n-1} \ell < \frac{3}{8}n^2$$

H_ℓ

$$T(n) \leq \Theta(n) + \frac{2}{n-1}\sum_{\ell=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^{n-1} c\ell$$

$$T(n) \leq \Theta(n) + \frac{2 \times 3 \times c \times n^2}{8 \times (n-1)} = \Theta(n) + \frac{3}{4}c \times \frac{(n-1+1)n}{(n-1)}$$

$$T(n) \leq \Theta(n) + \frac{3cn}{4} + \frac{3cn}{4(n-1)} = \Theta(n) + \frac{3cn}{4} + \frac{3c}{4} + \frac{3c}{(n-1)4}$$

$$T(n) \leq cn - \underbrace{\left(\frac{cn}{4} - \Theta(n) - \frac{3c}{4} - \frac{3c}{4(n-1)}\right)}_{>0 \text{ si } c \text{ choisit assez gd.}}$$

$$T(n) \leq cn$$

$T(n) = O(n)$. Par ailleurs, à cause de l'appel à partition. $T(n) = \Omega(n)$, donc $T(n) = \Theta(n)$

Intro Select ?