Complex (14/11)

Soit $m(i,j)$ le nombre minimal de multiplications scalaires nécessaires pour calculer

$$A_i \times A_{i+1} \times \dots \times A_j$$

$p_{i-1} \times p_i$ $\quad$ $p_i \times p_{i+1}$ $\quad$ $p_{j-1} \times p_j$

$$(\underbrace{A_i \times A_{i+1} \times A_{i+2} \times A_k}_{(1)}) \underbrace{\times}_{(3)} (\underbrace{A_{k+1} \times \dots \times A_j}_{(2)})$$

$m(i,i) = 0$

$m(i,i+1) = p_{i-1} \times p_i \times p_{i+1}$

$$m(i,j) = \min \{ \underbrace{m(i,k)}_{(1)} + \underbrace{m(k+1,j)}_{(2)} + \underbrace{p_{i-1} p_k p_j}_{(3)} \mid i \leq k < j \}.$$

Soit $P(n)$ le nombre de parenthesage de A_1, A_2, A_n.

$P(1) = 1$ $\quad$ $P(3) = 2$ $\quad$ $P(5) = 14$

$P(2) = 1$ $\quad$ $P(4) = 5$ $\quad$ $P(6) = 42$

$$P(n) = \sum_{k=1}^{n-1} P(k) P(n-k)$$

Soit 5 matrices :

$A_1 : 10 \times 15$ (p_0, p_1)

$A_2 : 15 \times 8$ (p_2)

$A_3 : 8 \times 2$ (p_3)

$A_4 : 2 \times 5$ (p_4)

$A_5 : 5 \times 10$ (p_5)

$10 A_1$ $15 A_2$ $8 A_3$ $2 A_4$ $5 A_5$ 10

i \ j	1	2	3	4	5
1	0	1200	540	640	840
2		0	240	390	640
3			0	80	260
4				0	100
5					0

TARGET

$m(1,2) = 15 \times 10 \times 8 = 1200$

$m(2,3) = 15 \times 8 \times 2 = 240$

$m(3,4) = 8 \times 2 \times 5 = 80$

$m(4,5) = 2 \times 5 \times 10 = 100$

$m(1,3) = A_1(A_2 A_3)$ $k=1$ $0 + 240 + 10 \times 15 \times 2 = 540$

$(A_1 . A_2) A_3$ $K = 2$ $1200 + 0 + 10 \times 8 \times 2 =$

$m(2,4) = A_2(A_3 A_4)$ $k=2$ $0 + 80 + 15 \times 8 \times 5$

$(A_2 A_3) A_4$ $k = 3$ $240 + 0 + 15 \times 2 \times 5 = 390$

$m(3,5)$ $A_3(A_4 A_5)$ $k=3$ $0 + 100 + 8 \times 2 \times 10 = 260$

$(A_3 A_4) A_5$ $k=4$ $80 + 0 +$ $8 \times 5 \times 10$

$m(1,4) = A_1(A_2 A_3 A_4)$ $k=1$ $0 + 390 + 10 \times 15 \times 5$

$(A_1 A_2)(A_3 A_4)$ $k=2$ $1200 + 80 + 10 \times 8 \times 5$

$(A_1 A_2 A_3) A_4$ $k=3$ $\underbrace{540 + 0 + 10 \times 2 \times 5}_{640}$

$m(2,5)$ $k=2$ $0 + 260 + 15 \times 8 \times 10 > 640$

$k=3$ $240 + 100 + 15 \times 2 \times 10 = 640$

$k=4$ $390 + 0 + 15 \times 5 \times 10 > 640$

$m(1,5)$ $k=1$ $0 + 640 + 10 \times 15 \times 10$

$k=2$ $1200 + 260 + 10 \times 8 \times 10$

$k=3$ $540 + 100 + 10 \times 2 \times 10 = 840$

$k=4$ $640 + 0 + 10 \times 5 \times 10$

Donc le parenthesage idéal est $(A_1(A_2 A_3))(A_4 A_5)$

Propriété des problèmes où la programmation dynamique va marcher (avec ses petits pieds)

- le problème a une sous-structures optimale :

La solution optimale du problème est composée de sous-solution optimale pour des sous-pb

La recursion exhaustive

pb : $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5$ $\quad$ sous pb : $A_1 A_2 A_3$ $\quad$ $A_4 A_5$

sol op : $(A_1(A_2 A_3))(A_4 A_5)$ $\quad$ sol opt $(A_1(A_2 A_3))$ $(A_4 A_5)$

Ya chevauchement dans tous les sous pb possible → Justifie le cache

P

Notons $m(n, k)$ le nombre de calorie max qu'on peut mettre dans un sac qu'on peut mettre dans un sac de K kg en choisissant parmi les n premiers poissons.

si $n > 0$, $k > 0$ $m(n, k) = \begin{cases} \max\left(c_n + m(n-1, k-p_n), m(n-1, k)\right) & \text{si } p_n \leqslant k \\ m(n-1, k) & \text{si } p_n > k. \end{cases}$

$p_1 = 2 \quad c_1 = 6$

$p_2 = 4 \quad c_2 = 10$

$p_3 = 6 \quad c_3 = 12$

m	0	2	4	6	8	10 ← max ~~pd~~ poids
0	0	0	0	0	0	0
1	0	6	$\boxed{6}$	6	6	$\boxed{6}$
n 2	0	6	$\boxed{10}$	16	16	$\boxed{16}$
3	0	6	10	16	18	$\boxed{22}$ ← Target

↑ nb de poissons