Mathématiques du Signal (IMASI)

Rémi Maubanc aka *Hyperion*

7 Janvier 2020 - 17:20

1 Définition

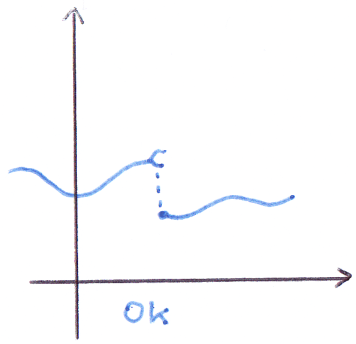
Signal	:	Observation d'un phénomène physique ou chimique variant dans l'espace et/ou le temps qui transporte l'information.
Signal Analogique	:	Signal continue par rapport à la position/temps. $\Rightarrow$ "natifs", naturel
Signal Numérique	:	Signal discret par rapport à toutes ses variables. $\Rightarrow$ stockés sur un ordinateur (mémoire finie)

1.1 Propriétés

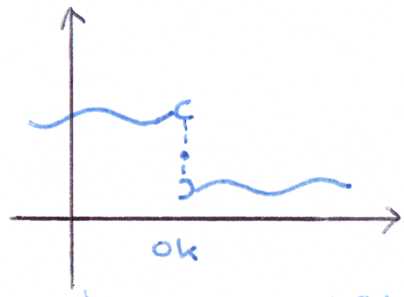
$$x : \begin{array}{rl} I \subseteq \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \textit{ ou } \mathbb{C} \\ t & \longrightarrow x(t) \end{array}$$

- x est de module berné. $|x(t)| \leq +\infty \quad \forall t \in I$

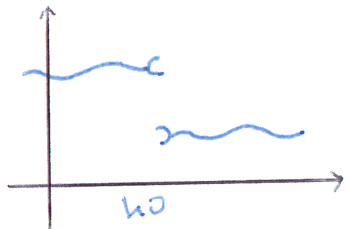
- x est continu/possède un nombre infini de discontinuité



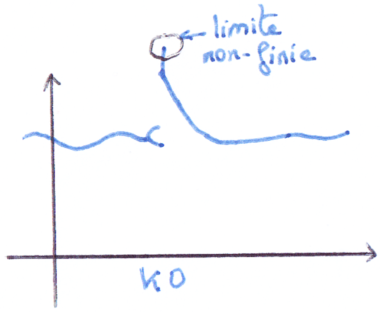
⇒ Continue par morceau



⇒ Continue par morceau



⇒ Non-continue par morceau



⇒ Non-continue par morceau

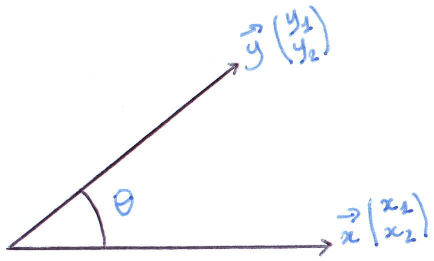
Soit :

- x_1 un signal
- x_2 un signal
- λ une constante

  Alors :

- $x_1 + x_2$ un signal
- $\lambda * x_1$ un signal

⇒ L'ensemble des signaux ont une structure d'espace vectoriel !



$< \vec{x}, \vec{y} >= ||\vec{x}||.||\vec{y}||.cos(\theta)$

$= x_1 * y_1 + x_2 * y_2$

où $||\vec{x}|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$

En dimension n : $<\vec{x},\vec{y}>= x_1 * y_1 + ... + x_n * y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i * y_i$ avec : $\vec{x}\binom{x_1}{x_n}, \vec{y}\binom{y_1}{y_n}$

Soit E un espace vectoriel.

$$\begin{array}{rccc} <,>: & ExE & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & <\vec{x},\vec{y}> \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{4 axiomes :} & \text{Symétrie : } \forall(\vec{x},\vec{y}) \in E^2, <\vec{x},\vec{y}>=<\vec{y},\vec{x}> \\ & \text{Bilinéaire : } \forall(\vec{x_1},\vec{x_2},\vec{y}) \in E^3, \lambda \in \mathbb{R} \\ & \text{Positif : } <\vec{x},\vec{x}> \geq 0 \\ & \text{Défini : } <\vec{x},\vec{x}>= 0 \Leftrightarrow x = 0_E \end{array}$$

Rappel : Calcul de la distance : $d(\vec{x},\vec{y}) = ||\vec{x}-\vec{y}|| = \sqrt{<\vec{x}-\vec{y},\vec{x}-\vec{y}>}$

Définition : Une fonction est dite p-intégrable sur $i \subseteq \mathbb{R}$ ssi

$$\int_I |f(t)|^p dt < +\infty \quad - \quad f \in \mathcal{L}^P(I)$$

$p = 2; x \in \mathcal{L}^2(I)$

$\int_I |x(t)|^2 dt$ si $i = \mathbb{R}$: $\int_{\mathbb{R}} |x(t)|^2 dt = E_x$ (énergie totale du signal)

$\Rightarrow \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \equiv$ espace des signaux d'énergie finie.

2 Cours 2

$$\begin{array}{ll} <\vec{x},\vec{y}>= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i & \sum \to discret \\ & \int \to continue \end{array}$$

fonction p-intégrable : $\int_I |f(t)|^p dt < +\infty \to \mathcal{L}^p(I)$

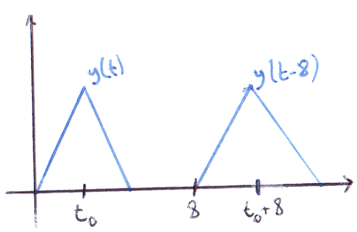
$\int_{\mathbb{R}} |x(t)|^2 dt = E_x$ — $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ = ensemble des signaux d'énergie finie

Soient $(x,y) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, $< x(t), y(t) >= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\overline{y(t)}dt \Rightarrow$ produit scalaire

Si x et y à valeur réelle : $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y(t)dt$

$$\int_{\mathbb{R}} |x(t)|^2 dt = \int_{\mathbb{R}} x(t)\overline{x(t)}dt =< x(t), x(t) >= ||x(t)||^2 = E_x$$

$y(t-8)$ est la version retardée de y d'un temps τ. $< x(t), x(t-8) >= \int_{\mathbb{R}} x(t)\overline{x(t-\tau)}dt = \sqrt{xx}$ = autocorrélation



Suite en cours de transcription