Probabilités Discrètes

Rémi Maubanc aka *Hyperion*

7 Janvier 2020 - 14:50

1 Expérience aléatoire et évènements

Une expérience est qualifiée d'aléatoire si on ne peut prévoir par avance son résultat et s'il se répète dans des conditions identiques elle peut donner lieu à des résultats différents. On note Ω l'univers, l'ensemble de tous les résultats possibles. ω représente un résultat de cette expérience.

Exemple 1 : On jette un dé cubique numéroté de 1 à 6. On lit le numéro apparu sur la face supérieure. Ω = 1, 2, 3, 4, 5, 6 = [[1,6]].

Exemple 2 : On jette un dé cubique numéroté de 1 à 6. On lit les numéros :

$$\Omega = [[1,6]]^2 = \begin{cases} (i,j) & i \in [[1,6]] \\ & j \in [[1,6]] \end{cases}$$

Ω n'est pas déduit de l'expérience de manière unique. Si on s'intéresse à la somme des points, on peut définir un Ω' = {2,...,12} = [[2,12]].

Lorsque l'on effectue une expérience aléatoire certains faits liés à cette expérience peuvent se produire ou non. On les appelle évènements.

Exemple 1 : Soit A_1 : "Le numéro obtenu est pair". A_1 réalisé si $\omega \in$ {2,4,6}. A_1 = {2,4,6}.

Soit A_2 : "Le numéro obtenu est supérieur ou égal à 4". A_2 = {4,5,6} $\in \mathcal{P}(\Omega)$ (parties de Ω).

Un évènement impossible est représenté par $\emptyset$.

Ω est réalisé si $\omega \in$ {1,2,...,6}. On l'appelle évènement certain.

Exemple 2 : $\Omega = [[1,6]]^2$.

B : "La somme des numéros est 6".

B = $\{(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)\}$

Card(Ω) = $6^2 = 36$.

B $\in \mathcal{P}(\Omega) = [[1,6]]^2$

$\mathcal{P}(\Omega)$: l'ensemble de tous les évènements quelconques. On dit que A et B sont incompatibles ssi $A \cap B = \emptyset$

2 Espace probabilisé fini

Définition : Soit Ω un ensemble fini.

$\mathcal{P}(\Omega)$ représente l'ensemble des parties de Ω. Le couple $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ est appelé espace probabilisable. $\{\omega\}$ évènements élémentaires, $\omega \in \Omega$.

Définition : On appelle probabilité définie sur l'espace $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ une application :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{P}, \mathcal{P}(\Omega) & \mapsto & [0,1] \\ A & \mapsto & \mathcal{P}(A) \end{array}$$

Vérifions les deux axiomes :

(i) : $\mathcal{P}(\Omega) = 1$

(ii) : $\mathcal{F}(A,B) \in \mathcal{P}^2(\Omega)/(A \cap B) = \emptyset$

$\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(B)$

$(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathcal{P})$ est un espace probabilisé fini. (Ω = *Univers*, $\mathcal{P}(\Omega)$ = *Tribu*, $\mathcal{P}$ = *Probabilité*)

Propriétés :

1. $\mathcal{P}(\overline{A}) = 1 - \mathcal{P}(A) \ \ et \ \ \mathcal{P}(\emptyset) = 0$

2. $\mathcal{P}(A - B) = \mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(A \cap B)$

3. Si $A \subset B \Rightarrow \mathcal{P}(A) \leqslant \mathcal{P}(B)$ ($\mathcal{P}$ est $\nearrow$)

4. $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(B) - \mathcal{P}(A \cap B)$

- $(A - B = \{x \in A$ et $x \notin B\{)$ (a)

- $A = (A - B) \cup (A \cap B).(A - B) \cap (A \cap B) = \emptyset$

  $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(A - B) + \mathcal{P}(A \cap B)$

  $\mathcal{P}(A - B) = \mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(A \cap B)$

- $A \subset B$, $A \cap B = A$

  $B = (B - A) \cup (A \cap B)$

  $\mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(B - A) + \mathcal{P}(A \cap B)$

  $\mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(B - A) + \mathcal{P}(A) \geq \mathcal{P}(A)$ $(\mathcal{P}(B - A) \geq 0)$

- $A \cup B = B \cup (A - B)$ - $(B \cap (A - B) = \emptyset)$

  $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(B) - \mathcal{P}(A - B) = \mathcal{P}(B) + \mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(A \cap B)$

2.1 Formule de Pointcaré

$(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathcal{P})$ espace de probabilité fini. Pour toute famille d'évènements $(B_k)_{1 \leq k \leq n}$

$$\mathcal{P}(\bigcup_{k=1}^{n} B_k) = \sum_{k=1}^{n} \left((-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \ldots \leq k \leq n} \mathcal{P}\Big(\bigcap_{j=1}^{k} B_{i,j} \Big) \right)$$

2.2 Théorème :

Soit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$. $\mathcal{P}$ est une probabilité sur Ω tel que : $p_i = \mathcal{P}(\{\omega_i\})$ $\forall i \in [[1,n]]$ on a alors :

$$\left\{ \begin{array}{c} p_i \geq 0 \quad \forall i \in [[1,n]] \\ \sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \end{array} \right\}$$

Réciproquement, si $(p_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une suite de réels vérifiant les deux lignes ci-dessus, alors $\exists!$ probabilité $\mathcal{P}$ sur Ω telle que :

$$\mathcal{P}(\{\omega\}) = p_i \forall i \; et \; \mathcal{P}(A) = \sum_{i,\omega_i \in A} p_i \forall A \in \mathcal{P}(A)$$

2.3 Démonstration

Si $\mathcal{P}$ est une probabilité sur Ω.

$$p_i = \mathcal{P}(\{\omega\}) \geq 0 \;\; \forall i \in [[1,n]] \; et \; \sum_{i=1}^{n} p_i = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{P}(\{\omega_i\}) = 1$$

or

$$\Omega = \bigcup_{i=n}^{n} (\{\omega_i\}) \quad - \quad \mathcal{P}(\Omega) = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{P}(\{\omega i\}) = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

Réciproque : Supposons (1) et (2) vérifiés.

Soit $\mathcal{P}$ l'application définie par $\mathcal{P}(A) = \sum_{i,\omega_i \in A} \mathcal{P}(\{\omega_i\})$

$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega) : A = \bigcup_{i,w_i \in A} \omega_i = \sum_{i,w_i \in A} p_i$

Montrons que $\mathcal{P}$ est une probabilité.

$$0 \leq \mathcal{P}(A) = \sum_{i,\omega_i \in A} \mathcal{P}_i \leq \sum_{i=1}^{n} p_i = 1. \;\; 0 \leq \mathcal{P}(A) \leq 1$$

$$\mathcal{P}(\Omega) = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{P}(\{\omega_i\}) = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

Si A et B sont deux évènements incompatibles. $A \cap B = \emptyset$

$$\begin{aligned} A \cup B = \mathcal{P}(\textstyle\bigcup_{i,\omega_i \in A \cup B} \{\omega_i) \quad &= \textstyle\sum_{i,\omega_i \in A} \mathcal{P}(\{\omega_i\}) + \sum_{i,\omega_i \in B} \mathcal{P}(\{\omega_i\}) \\ &= \mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(B) \end{aligned}$$

$\mathcal{P}$ est donc une probabilité.

2.4 Définition :

On dit qu'il y a équiprobabilité lorsque les probabilités de tous les évènements élementaires sont égales. On dit que $\mathcal{P}$ est uniforme sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega) \quad - \quad \mathcal{P}(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)}$$

En effet, $\exists \lambda \in [0, 1] \ / \ p_i = \lambda \forall i \in [[1, n]]$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \Rightarrow n\lambda = 1 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{n}$$

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega) \ \ \mathcal{P}(A) = \sum_{i, \omega_i \in A} \lambda = \lambda \sum_{i, \omega_i \in A} 1 = \lambda \ Card(A) = \frac{Card(A)}{Card(\omega)}$$

2.5 Exercices :

Une urne contenant 5 boules blanches et 5 boules noires. Les boules sont numérotés de 1 à 5. Décrire l'univers associé à chacune des expériences suivantes.

1. On tire une à une trois boules de l'urne en les remettant à chaque fois.

2. On tire une à une trois boules sans remise.

3. On tire toutes les boules sans remise.

$U = \{B_1, ..., B_r, N_1, ..., N_r\}$

Correction :

1. $\Omega = U^3 = \{(a, b, c), a \in U, b \in U, c \in U\}$
   $Card(\Omega) = 10^3$

2. $\Omega = \{(a, b, c) \in U^3$ tel que $a \neq b, b \neq cetc \neq a\}$ 3 listes à élements distincts. $Card(\Omega) = A_{10}^3 = \frac{10!}{7!}$

3. $\Omega = \{$permutations de [[A,10]] $\rightarrow$ [[A,b]]$\}$ $Card(\Omega) = 10!$

$$\mathcal{P}(A) = \frac{5^3 + 4^3 + 3^3}{1728} = \frac{125 + 64 + 27}{1728} = \frac{216}{1728} = \frac{108}{864} = \frac{1}{8}$$

2.6 Exercice 3

Un placard contient 10 paires de chaussures toutes différentes. On prend 4 chaussures au hasard.

1. Probabilité de tirer deux paires complètes
2. Probabilité de tirer au moins une paire
3. Probabilité de tirer une paire et une seule

Correction :

1. $\Omega = \{Toutes\ les\ combinaisons\ de\ chaussures\ parmi\ 20\}$;
   $Card(\Omega) = \binom{20}{4}$
   $$A : "2\ paires\ completes", \mathcal{P}(A) = \frac{\binom{10}{2}}{\binom{20}{4}} = \frac{3}{323} = 0,009$$
2. B est l'union de $3! = 6$ évènements de même type que B.
   $$B = \{1\ blanche, 1\ noire, 1\ bleue\}$$
   $$Card(B) = 5 * 4 * 3$$
   Card de B = 60 * 6 = 360. $\mathcal{P}(B) = \frac{360}{1728} = \frac{5}{24}$
3. (a) $\Omega = \{$3 listes d'élements différents pris dans U$\}$
   $Card(\Omega) = A_{12}^3 = \frac{12!}{9!} = 10 * 11 * 12 = 1320$

   (b) B = {1 blanche,1 noire,1 blanche}, Card(B) = 60
   Card(B) = 60 * 6 = 360

   (c) Soit C : "La première boule blanche arrive au troisième tirage"
   $Card(C) = 5 * A_7^2 = 5 * 42 = 210$ - $P(C) = \frac{210}{1320} = \frac{21}{132}$

2.7 Exercice 4

Une urne U contient 9 boules numérotées de 1 à 9. On tire 2 boules. Déterminez la probabilité d'obtenir 2 boules portant des numéros de même parité.

1. On tire deux boules simultanéement
2. On tire la première boule puis la deuxième sans remise
3. On tire une boule, on la remet avant de tirer la deuxième

<u>Correction :</u>

1. $\Omega = \{(1,2);(1,3);(1,4);...;(1,3);(2,1);(2,3);...;(9,8)\}$
   L'ensemble de toutes combinaisons de deux boules prises dans U :
   $$Card(\Omega) = \mathcal{C}_9^2 = \binom{9}{2} = \frac{9!}{2! * 7!} = \frac{8*9}{2} = \frac{72}{2} = 36$$
   Soit A l'évenement : "Les deux nombres obtenus sont de même parité"
   Il y a $\binom{4}{2}$ façons de choisir 2 boules paires/impaires.
   $$Card(A) = \binom{4}{2} + \binom{5}{2}, \quad \mathcal{P}(A) = \frac{\binom{4}{2}+\binom{5}{2}}{36} = \frac{10+6}{36} = \frac{4}{9}$$
2. $\Omega = \{2 \text{ listes d'élements pris dans U}\} \neq \{\text{l'ensembles des arrangements.}\}$
   $$Card(\Omega) = A_9^2 = \frac{9!}{(3-2)!} = 8*9 = 72$$
   $$\mathcal{P}(A) = \frac{A_4^2 + A_5^2}{A_9^2}$$
   [1]
   $$A_4^2 = \frac{4!}{2!} = 12; \quad - \quad A_5^2 = \frac{5!}{2!} = 20$$
   $$\mathcal{P}(A) = \frac{12+20}{72} = \frac{32}{72} = \frac{4}{9}$$
3. Ω l'ensemble des 2 listes. $Card(\Omega) = 9^2 = 81$
   $\mathcal{P}(A) = \frac{4^2+5^2}{81} = \frac{16+25}{81} = \frac{41}{81}$

[1]Incertitude sur l'indice du denominateur

2.8 Exercice 5

On considère une urne U contenant 5 boules blanches, 4 boules noires et 3 boules bleues.

1. On tire simultanément 3 boules dans l'urne U
   - Probabilité d'obtenir 3 boules de la même couleur ?
   - Probabilité d'obtenir 1 boule de chaque couleur ?
2. On tire successivement 3 boules en la remettant après chaque tirage
   - Probabilité d'obtenir 3 boules de la même couleur ?
   - Probabilité d'obtenir 1 boule de chaque couleur ?
3. Tirage sans remise
   - Probabilité d'obtenir 3 boules de la même couleur ?
   - Probabilité d'obtenir 1 boule de chaque couleur ?
   - Probabilité que la première boule blanche tirée le soit au 3^e tirage

Correction :

1)a) Ω : l'ensemble des combinaisons de 3 boules dans U.

$Card(\Omega) = \binom{12}{3} = 220$

A : "On tire 3 boules de la même couleur" $\Rightarrow \mathcal{P}(A) = \frac{10+4+1}{220} = \frac{3}{44}$

1)b)

$$\frac{5*4*3}{220} = \frac{60}{220} = \frac{6}{22} = \frac{3}{11}$$

2)a)

$$\Omega = \{3 \ listes\}, \ Card(\Omega) = 12^3$$

3 Probabilité Conditionnelle

$(\Omega, \mathcal{P})$ espace probabilisé fini où ϱ est la probabilité uniforme.

Soit A un évènement de probabilité $\neq 0$. La probabilité conditionnelle de B sachant A :

$$\mathcal{P}_A(B) = \frac{\mathcal{P}(A \cap B)}{\mathcal{P}(A)} = \mathcal{P}_A(B)$$

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega),\ on\ definit\ \mathcal{P}_A\ :\ \begin{array}{rcl} \mathcal{P}(\Omega) & \Rightarrow & \mathbb{R} \\ B & \Rightarrow & \mathcal{P}_A(B) \end{array}$$

est une probabilité conditionnelle. Elle est appelée la <u>probabilité conditionnelle</u>.

<u>Remarque :</u> $\mathcal{P}_A(\overline{B}) = 1 - \mathcal{P}_A(B)$

3.1 Formule des probabilités composées

Soit $n \in \mathbb{N}$ $(n \geq 2)$. Pour toutes familles d'évènements A_i $(a \leq i \leq n)$: $\mathcal{P}(A_i \cap A_{n-1}) \neq 0$

On a la formule suivante :

$$\mathcal{P}(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n) = \mathcal{P}(A_1) * \mathcal{P}\left(\frac{A_2}{A_1}\right) * \mathcal{P}\left(\frac{A_3}{A_1} \cap A_2\right) * ... * \mathcal{P}\left(\frac{A_n}{A_1} \cap A_2 \cap ... \cap A_{n-1}\right)$$

En effet :

$$\begin{aligned} & \mathcal{P}(A_1) * \mathcal{P}_{A_1}(A_2) * \mathcal{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) * ... * \mathcal{P}_{A_1 \cap ... \cap A_{n-1}}(A_n) \\ & = \mathcal{P}(A_1) * \tfrac{\mathcal{P}(A_1 \cap A_2)}{\mathcal{P}(A_1)} * \tfrac{\mathcal{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}{\mathcal{P}(A_1 \cap A_2)} * \tfrac{\mathcal{P}(A_1 \cap ... \cap A_n)}{\mathcal{P}(A_1 \cap ... \cap A_{n-1})} \\ & = \mathcal{P}(A_1 \cap ... \cap A_n) \end{aligned}$$

3.2 Définition

Soit Ω un univers fini. On appelle <u>système complet d'évènements</u> de Ω toute famille :

$$\forall i \neq j : \begin{cases} A_i\ (1 \leq i \leq n)\ (n \in \mathbb{N}*)\ tel\ que\ A_i \cap A_j = \varnothing \\ \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega \end{cases}$$

<u>Remarque :</u> $\sum_{i=1}^{n} \mathcal{P}(A_i) = 1$ car $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$

$$\begin{aligned} & \forall B \in \mathcal{P}(\Omega)\ \ \mathcal{P}(B) = \textstyle\sum_{i=1}^{n} \mathcal{P}(B \cap A) \\ & B \cap A_1, B \cap A_2, ..., B \cap A_n \end{aligned}$$

Sont deux à deux incompatibles $(B \cap A_i \cap B \cap A_j \neq 0)$

$\mathcal{P}(\bigcup_{i=1}^{n}(B \cap A_i)) = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{P}(B \cap A_i)$

Or $\bigcup_{i=1}^{n}(B \cap A_i) = B \cap (\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = B \cap \Omega = B$

$\mathcal{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{P}(B \cap A_i)$ <u>Formule des probabilités totales</u>

3.3 Formule de Bayes

1) $\mathcal{P}_B(A) = \frac{\mathcal{P}_A(B)*\mathcal{P}(A)}{\mathcal{P}(B)} \Big| \; \mathcal{P}(B) \neq 0$

Soit $(A_1, ..., A_n)$ un système complet. $\mathcal{P}(A_i) \neq 0$

$\forall B,\ \mathcal{P}(B) \neq 0.$

$$\mathcal{P}\left(\frac{A_i}{B}\right) = \frac{\mathcal{P}(\frac{B}{A_i}) * \mathcal{P}(A_i)}{\mathcal{P}(B)} = \frac{\mathcal{P}_{A_i}(B) * \mathcal{P}(A_i)}{\sum_{j=1}^{n} \mathcal{P}(B \cap A_j)} \quad or \quad \mathcal{P}(B) = \sum_{j=1}^{n} \mathcal{P}(B \cap A_j)$$

2)

$$\forall i,\ \mathcal{P}_B(A_i) = \frac{\mathcal{P}_{A_i}(B) * \mathcal{P}(A_i)}{\sum_{j=1}^{n} \mathcal{P}(B \cap A_i)} = \frac{\mathcal{P}_{A_i}(B) * \mathcal{P}(A_i)}{\sum_{j=1}^{n} \mathcal{P}_{A_j}(B) * \mathcal{P}(A_j)}$$

<u>Définition :</u> A et B sont indépendants ssi :

$$\mathcal{P}_A(B) = \mathcal{P}\left(\frac{B}{A}\right) = \mathcal{P}(B) \Leftrightarrow \frac{\mathcal{P}(A \cap B)}{\mathcal{P}(A)} = \mathcal{P}(B) \Leftrightarrow \mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) * \mathcal{P}(B)$$

4 Variables aléatoires discrètes

<u>Définition :</u> Ω un univers fini

Toute application $\mathcal{X}$ définie sur Ω à valeurs dans un ensemble E est appelé variable aléatoire sur Ω. Si $E = \mathbb{R}$ alors $\mathcal{X}$ est appelé variable aléatoire (v.a.) réelle.

<u>Notation :</u> $\mathcal{X}(\Omega) = \{x_1, x_2, ..., x_n\},\ n = Card(\Omega)$

$\mathcal{X}(\Omega) \subset \mathbb{N}\ (ou \subset \mathbb{Z})$

<u>Exemple :</u> Considérons le lancer de deux dés équilibrés.

$\Omega = [[1, 6]]^2 = \{(1, 1), (1, 2)...(6, 6)\}$ — $Card(\Omega) = 6^2 = 36$

$$Soit\ \mathcal{S}\ l'application\ : \begin{cases} \Omega & \mapsto & E \\ \omega(i,j) & \mapsto & i+j \end{cases}$$

$E = \{2, ...12\}$. Calculer $\mathcal{P}(\mathcal{S} = 5)$

$$\mathcal{P}(\mathcal{S} = 5) = \mathcal{P}(\{(1,4), (3,2), (2,3), (4,1)\})$$
$$\mathcal{P}(\mathcal{S} = 5) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

$\mathcal{P}(\mathcal{S} = s) = \mathcal{P}(\mathcal{S}^{-1}\{s\}) \rightarrow$ image réciproque

$\mathcal{S}^{-1} = \{\omega \in \Omega \mathcal{S}(\omega) = s\}$

Exemple : Soit $A \in \mathcal{P}(\Omega)$.

$$Soit\ : \begin{cases} \mathcal{X} : \ \Omega & \mapsto & \mathbb{R} \\ \omega & \mapsto & \begin{array}{lll} 1 & si & \omega \in A \\ 0 & sinon & (\omega \in \overline{A}) \end{array} \end{cases}$$

$\mathcal{X}$ est la variable aléatoire indicatrice de A notée $\mathcal{X} = \not\Vdash_A$

$$Ou \not\Vdash_A(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in A \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Remarque : $\mathcal{F}(\Omega, \mathbb{R})$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, l'ensemble des variables aléatoires.

Définition : On appelle Fonction de répartition de la variable aléatoire $\mathcal{X}$

$$Ou\ F_A(x) = \begin{array}{rcl} F : \mathbb{R} & \mapsto & [0,1] \\ x & \mapsto & F(x) = \mathcal{P}(\mathcal{X} < x) \end{array}$$

Remarque : F est croissante. $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$

4.1 Moments d'une variable aléatoire

4.1.1 Espérence, mathématiques de X

Soit X une variable aléatoire discrète. On appelle X : $E(X) = \sum_i x_i \mathcal{P}(X = x_i)$. C'est une moyenne prépondérée.

Remarque : E est un opérateur linéaire : $E(\alpha, X) = \alpha E(X) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$
$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$ — $E(a) = a$ — $\forall a \in \mathbb{R}$

Définition : $E(\varphi(X)) = \sum_i \varphi(x_i) * \mathcal{P}[X = x_i]$ où φ est une fonction quelconque.

4.1.2 Variance

Définition : On appelle variance de X, $\sigma^2 = \mathcal{V}(X) = E((X - E(X))^2)$.
Une variance est une mesure de la dispertion de X autour de la valeur centrale.
$\sigma = \sqrt{V(X)}$ écart-type

$$V(X) = E((X - E(X))^2) = \sum (x_i - n)^2 * \mathcal{P}(X = x_i)$$

où $n = E(X)$

Formule de König-Hugghen :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

4.2 Lois de probabilités d'usage courant

4.2.1 Loi discrète uniforme

$$X(\Omega) = \{1, 2, ..., n\}$$
$$P(\alpha = b) = \frac{1}{n}$$
$$\forall x \in X(\Omega)$$
$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} k * \mathcal{P}(X = k) = \frac{1}{n} * \sum_{k=1}^{n} k$$
$$E(X) = \frac{n(k+1)}{2n} = \frac{n+1}{2} \qquad V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$E(X^2) = \sum_{k=1}^{n} k^2 * \mathcal{P}(X = k) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{n} * \frac{n(n+1) * (2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$V(X) = \frac{(n+1) * (2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4} = \frac{2 * (2n^2 + 3n + 1) - 3 * (n^2 + 2n + 1)}{12} = \frac{n^2 - 1}{12}$$

4.2.2 Loi de Bernoulli de paramètre : $B(p)$

X = — 1 si un évenement A se réalise avec la probabilité p
0 sinon (avec 1 - p) = q

$$E(X) = \sum_{k=0}^{1} k * \mathcal{P}(X = k) = \mathcal{P}(X = 1) = p$$

$$E(X^2) = \sum_{k=0}^{1} k^2 * \mathcal{P}(X = k) = p$$

$$V(X) = p - p^2 = p * (1 - p) = pq \Rightarrow V(X) = pq$$

4.2.3 Loi Binomiale $B(n, p)$

On répète n fois l'expérience de Bernoulli dans des conditions identiques (résultats indépendants). X représente le nombre de réalisation de l'évènement A.

$X = \sum_{i=1}^{n} X_i \quad X_i \hookrightarrow B(p)$ indépendants. ($\hookrightarrow$: suit)

$E(X) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} p = np$

$V(X) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i)$ (car X_i indépendant) $= \sum_{i=1}^{n} pq = npq$

$\mathcal{P}(X = k) = \binom{n}{k} * p^k * (1 - p)^{n-k}$

$\forall k = 0, 1, ..., n$

Suite et fin dernier exercice

2) A_i : "Tirer au moins une paire"

$\overline{A_i}$: "Tirer 4 chaussures provenant de 4 paires différentes"

Il y a $\binom{10}{4}$ facons de choisir 4 paires de chaussures parmi 10. Pour chacune d'elles il y a 2 façons de choisir une chaussure de chaque paire.

$$\mathcal{P}(\overline{A_2}) = \frac{\binom{10}{4} * 2^4}{\binom{20}{4}} = \frac{224}{323} \Rightarrow \mathcal{P}(A_2) = 1 - \frac{224}{323} = \frac{99}{323} = 0.307$$

3) A_3 : "Tirer une paire et une seule"

$$A_3 = A_2 - A_1 \ \mid \ \mathcal{P}(A_3) = \mathcal{P}(A_2 - A_1) = \mathcal{P}(A_2) - \mathcal{P}(A_1 \cap A_2)$$

Or $A_1 \cap A_2 = A_1 (A_i \subset A_2)$

$$\mathcal{P}(A_3) = \mathcal{P}(A_2) - \mathcal{P}(A_1) = \frac{99}{323} - \frac{3}{323} = \frac{96}{323} \approx 0.297$$

4.2.4 Loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$

C'est la loi d'une variable aléatoire entière positive qui satisfait à :

$$\mathcal{P}(X = k) = e^{-\lambda} * \frac{\lambda^k}{k!} \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

On obtient la loi de Poisson comme une approximation de la loi Binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

Théorème : $\mathcal{B}(n, p)$ converge en loi vers une variable de Poisson $\mathcal{P}(\lambda = np)$ lorsque $n \to +\infty$ et $p \to 0$.
En pratique cette approximation est très satisfaisante dès que $p < 0.1$ et $n > 50$.

$$\binom{n}{k} * p^k * (n-p)^{n-k} \approx e^{-(np)} * \frac{(np)^k}{k!} \ \mid \ (\lambda = np)$$

$$\underline{E(X)} = \sum_{k=0}^{+\infty} k * \mathcal{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} k * e^{-k} * \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-k} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!}$$

$$= e^{-\lambda} * \lambda * \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = e^{-\lambda} * \lambda * e^{\lambda} = \lambda$$

$$\underline{E(X^2)} = \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 * \mathcal{P}(X = k) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 * \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-k} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k\lambda^k}{(k-1)!}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} (k+1-1) * \frac{\lambda^k}{(k-1)!} = e^{-\lambda} \left(\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{(k-2)!} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \right)$$

$$= e^{-\lambda} \left(\lambda^2 * \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \lambda \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \right) = e^{-\lambda} * (\lambda^2 * e^{\lambda} + \lambda * e^{-\lambda}) = \lambda^2 + \lambda$$

$$\underline{V(X)} = E(X^2) - E(X)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

$$\underline{V(X) = \lambda}$$

4.2.5 Loi hypergéométrique $H(N, n, p)$

On considère une population de N individus parmi lesquelles une proportion p possède un certain caractère. On prélève un échantillon de taille n. Tirage sans remise.

Soit X la variable aléatoire : nombre d'individus possédant le caractère.

$$\mathcal{P}(X = k) = \frac{\binom{Np}{k} * \binom{N-Np}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

On dit que : $X \hookleftarrow H(N, n, p)$

$E(X) = np$ et $V(X) = \frac{N-n}{N-1} * npq$ où $(q = 1 - p)$

Remarque :

$$Pour\ N\ tres\ grand\ : \quad \begin{array}{rcl} H(N,n,p) & \rightarrow & B(n,p) \\ \mathcal{N} & \rightarrow & +\infty \end{array}$$

En pratique, cette approximation est très bonne dès que le taux de sondage : $\frac{n}{N} < 10\%$

4.2.6 Loi géométrique et loi de Pascal

C'est la loi du nombre d'essais nécessaire pour faire apparaître un évènement A de probabilité p :

$$\mathcal{P}(X = k) = p(1 - p)^{k-1} \quad \forall k \geq 1$$

$$E(X) = \frac{1}{p}\ , \quad V(X) = \frac{q}{p2} \quad (q = 1 - p)$$

Loi de Pascal :

C'est la loi du nombre d'essais nécessaire pour observer n fois un évènement A de probabilité p. L'expérience se termine par A.

$$\mathcal{P}(X = k) = p * \binom{n-1}{k-1} * p^{n-1} * q^{k-n} \quad (q = 1 - p)$$

$$= \binom{n-1}{k-1} * p^n * q^{k-n} \quad \forall k \geq n$$

Pour $n = 1$, on retrouve la loi géométrique.

$X = \sum_{i=1}^{n} X_i$; somme indépendante de loi géométrique $X_i \hookleftarrow \mathcal{G}(p)$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p} = \frac{n}{p}$$

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{q}{p^2} = \frac{nq}{p^2}$$

Exemple : La proportion de pièces défectueuses dans un lot de pièce est de 5%. Le contrôle de fabrication de pièce est tel que :

- Si la pièce est bonne, elle est acceptée avec une probabilité de 96%
- Si la pièce est défectueuse, elle est refusée avec une probabilité de 98%

On choisit une pièce au hasard :

1. Quelle est la probabilité d'une erreur de contrôle ?
2. Quelle est la probabilité qu'une pièce acceptée soit mauvaise ?

Correction :

	A l'évènement : "pièce acceptée"	$\mathcal{P}_A(A) = 96\%$
1) Notons :	B l'évènement : "pièce bonne"	$\mathcal{P}(\overline{B}) = 5\%$
	E l'évènement : "erreur de contrôle"	$\mathcal{P}_{\overline{B}}(\overline{A}) = 98\%$

On cherche $\mathcal{P}(E)$

$E = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$ car $A \cap \overline{B}$ et $\overline{A} \cap B$ incompatibles.

$$\mathcal{P}(E) = \mathcal{P}_{\overline{B}} * \mathcal{P}(\overline{B}) + \mathcal{P}_B(\overline{A}) * \mathcal{P}(B) = 0.02 * 0.05 + 0.04 * 0.95 = 3.9\%$$

2) On cherche $\mathcal{P}_A(\overline{B})$

$$A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$$

$$\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(A \cap B) + \mathcal{P}(A \cap \overline{B}) = \mathcal{P}_B(A) * \mathcal{P}(B) + \mathcal{P}_{\overline{B}}(A) * \mathcal{P}(\overline{B})$$

$$= 0.96 * 0.95 + 0.02 * 0.05 = 0.913 = 91.3\%$$

$$\mathcal{P}_A(\overline{B}) = \frac{\mathcal{P}_{\overline{B}}(A) * \mathcal{P}(\overline{B})}{\mathcal{P}(A)} = \frac{\mathcal{P}_{\overline{B}}(A) * \mathcal{P}(\overline{B})}{\mathcal{P}_B(A) * \mathcal{P}(B) + \mathcal{P}_{\overline{B}}(A) * \mathcal{P}(\overline{B})}$$

$$\mathcal{P}_A(\overline{B}) = \frac{0.02 * 0.05}{0.96 * 0.95 + 0.02 * 0.05} = 0.0011$$

<u>Exemple :</u> On dispose de 2 dés A et B. Le dé A a 4 faces rouges et 2 faces blanches. Le dé B a 2 faces rouges et 4 faces blanches.

On lance une pièce de monnaie tel que la probabilité d'obtenir pile soit de $\frac{1}{3}$.
Si on obtient pile on décide de jouer uniquement avec A. Sinon on joue avec uniquement B.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir rouge du premier coup ?

2. On a obtenu rouge au 2 premiers lancers, quelle est la probabilité d'avoir rouge au 3$^{\text{ème}}$ coup ?

3. On a obtenu rouge au n ($n \in \mathbb{N}$) premiers lancers, quelle est la probabilités d'utiliser le dé A ?

<u>Correction :</u> Soit R_k : "On obtiens rouge au k$^{\text{ième}}$ coup".
1) On cherche R_1 $R_1 = (R_1 \cap A) \cup (R_1 \cap B)$. Les deux évènements sont incompatibles.

$$\mathcal{P}(R_1) = \mathcal{P}(R_1 \cap A) + (\mathcal{P}(R_1 \cap B) = \mathcal{P}_A(R_1) * \mathcal{P}(A) + \mathcal{P}_B(R_1) * \mathcal{P}(B)$$
$$= \frac{2}{3} * \frac{1}{3} + \frac{1}{3} * \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

2) On cherche $\mathcal{P}_{R_1 \cap R_2}(R_3)$
D'après le théorème d'intersection :

$$\mathcal{P}_{R_1 \cap R_2}(R_3) = \frac{\mathcal{P}(R_1 \cap R_2 \cap R_3)}{\mathcal{P}(R_1 \cap R_2)}$$

En cas d'intersection, il faut penser à conditionner !

$$R_1 \cap R_2 = (R_1 \cap R_2 \cap A) \cup (R_1 \cap R_2 \cap B) \text{ Evenements incompatibles}$$

$$= \mathcal{P}(R_1 \cap R_2) = \mathcal{P}_A(R_1 \cap R_2) * \mathcal{P}(A) + \mathcal{P}_B(R_1 \cap R_2) * \mathcal{P}(B)$$
$$= \left(\frac{2}{3}\right)^2 * \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 * \frac{2}{3} = \frac{4}{27} + \frac{2}{27} = \frac{6}{27} = \frac{2}{9}$$

$$\mathcal{P}(R_1 \cap R_2 \cap R_3) = \mathcal{P}_A(R_1 \cap R_2 \cap R_3) * \mathcal{P}(A) + \mathcal{P}_B(R_1 \cap R_2 \cap R_3) * \mathcal{P}(B)$$
$$= \left(\frac{2}{3}\right)^3 * \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^3 * \frac{2}{3} = \frac{10}{81}$$

$$\mathcal{P}(R_3) = \frac{10}{81} * \frac{9}{2} = \frac{5}{9}$$

3) On cherche $\mathcal{P}_{R_1 \cap R_2 \cap \ldots \cap R_n}(A)$

Formule de BAYES :

$$\mathcal{P}_B(A) = \frac{\mathcal{P}_A(B) * \mathcal{P}(A)}{\mathcal{P}(B)}$$
$$\mathcal{P}_{R_1 \cap \ldots \cap R_n}(A) = \frac{\mathcal{P}_A(R_1 \cap \ldots \cap R_n) * \mathcal{P}(A)}{\mathcal{P}(R_1 \cap \ldots \cap R_n)}$$
$$\mathcal{P}_{R_1 \cap \ldots \cap R_n}(A) = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n * \frac{1}{3}}{\mathcal{P}_A(R_1 \cap \ldots \cap R_n) * \mathcal{P}(A) + \mathcal{P}_B(R_1 \cap \ldots \cap R_n) * \mathcal{P}(B)}$$
$$= \frac{\frac{2^n}{3^{n+1}}}{\frac{2^n}{3^{n+1}} + \left(\frac{1}{3}\right)^n * \frac{2}{3}} = \frac{2^n}{2^n + 2} = \frac{2^{n-1}}{2^{n-1} + 1}$$

Exercice : Le nombre d'appel téléphonique à un standard qui suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. Supposons que pour chaque appel, il y ait une probabilité p pour que le correspondant demande un poste A.

1. Calculer la probabilité qu'il y ait k appel vers A, sachant qu'il y a eu n appel au standard.

2. Calculer $p(n, k)$ la probabilité qu'il y ait n appels au standard et k appel au poste A.

3. Déterminer la loi de $\mathcal{Y}$

   - $\mathcal{Y}$ variable aléatoire : nombre d'appel vers A
   - $\mathcal{X}$ variable aléatoire : nombre d'appel vers le standard

Correction :

1) $\mathcal{X} \hookleftarrow \mathcal{P}(\lambda)$ Loi de Poisson

$$\mathcal{P}_{\mathcal{X}=n}(\mathcal{Y}=k) = \binom{n}{k} * p^k * (1-p)^{n-k}$$

$$\forall 0 \leq k \leq n \quad \frac{\mathcal{X}}{\mathcal{Y}} \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$$

2) $p(n,k) = \mathcal{P}((\mathcal{X}=n) \cap (\mathcal{Y}=k))$. Loi conjointe

$$p(n,k) = \mathcal{P}_{\mathcal{X}=n}(\mathcal{Y}=k) * \mathcal{P}(\mathcal{X}=n) = \binom{n}{k} * p^k * (1-p)^{n-k} * e^{-\lambda} * \frac{\lambda^n}{n!}$$

$$= \frac{n!}{k! * (n-k)!} * p^k * (1-p)^{n-k} * e^{-\lambda} * \frac{\lambda^n}{n!}$$

3) Loi de $\mathcal{Y}$?

$$(\mathcal{Y}=k) = \bigcup_{n \geq k}^{+\infty} ((\mathcal{Y}=k) \cap (\mathcal{X}=n))$$

$$\mathcal{P}(\mathcal{Y}=k) = \sum_{n \geq k}^{+\infty} \mathcal{P}((\mathcal{Y}=k) \cap (\mathcal{X}=n)) = \sum_{n \geq k}^{+\infty} \frac{p^k * (1-p)^{n-k} * e^{-\lambda} * \lambda^k}{k! * (n-k)!}$$

$$= \frac{(\lambda * p)^k * e^{-\lambda}}{k!} \sum_{n \geq k}^{+\infty} \frac{((1-p)\lambda)^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{p^k * e^{-\lambda}}{k!} * \sum \frac{((1-p)\lambda)^{n-k}}{(n-k)!}$$

$$= \frac{(\lambda * p)^k * e^{-\lambda}}{k!} * e^{1-p)\lambda} \ (DL)$$

$$\mathcal{P}(\mathcal{Y}=k) = \frac{(\lambda * p)^k}{k!} * e^{-\lambda p}$$

$\mathcal{P} \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda * p)$

Exercice : Une urne contient 4 boules blanches et 5 boules noires. On tire simultanéement 3 boules de cette urne. $\mathcal{X}$ variable aléatoire : nombre de boules blanches obtenues.

1. Donner la loi de $\mathcal{X}$ et son espérence $E(\mathcal{X})$
2. $\forall i \in [[0,3]]$, on note A_i : "$\mathcal{X}$ = i". Calculer $p_i = \mathcal{P}(A_i)$
3. On remet dans l'urne les boules noires obtenues et on garde les boules blanches obtenues. Puis on tire une $4^{\text{ème}}$ boule. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche.

Correction :

1) $\mathcal{X} \hookrightarrow H(N=9, n=3, p=\frac{4}{9}$

$$\mathcal{P}(\mathcal{X}=k) = \frac{\binom{n}{k} * \binom{5}{3-k}}{\binom{9}{3}} \quad - \quad \forall k \in [[0,3]]$$

$\mathcal{X}(\Omega) = [[0,3]]$

$E(\mathcal{X}) = np = 3 * \frac{4}{9} = \frac{4}{3}$

2)

- $\mathcal{P}_0 = \mathcal{P}(\mathcal{X}=0) = \frac{5}{42}$
- $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}(\mathcal{X}=1) = \frac{10}{21}$
- $\mathcal{P}_2 = \mathcal{P}(\mathcal{X}=2) = \frac{5}{14}$
- $\mathcal{P}_3 = \mathcal{P}(\mathcal{X}=3) = \frac{1}{42}$

3) Soit B : "La 4^{e} boule est blanche" $B = \bigcup_{i=0}^{3}(B \cap A_i)$

$\mathcal{P}(A_i) = p_i$

$$\mathcal{P}(B) = \sum_{i=0}^{3} \mathcal{P}(B \cap A_i) = \sum_{i=0}^{3} \mathcal{P}_{A_i}(B) * \mathcal{P}(A_i)$$

$$\mathcal{P}_{A_i}(B) = \frac{4-i}{9-i} \quad \forall i \in [[0,3]]$$

$$\mathcal{P}(B) = \sum_{i=0}^{3} (\frac{4-i}{9-i}) * p_i = \frac{4}{9} * \frac{5}{42} + \frac{3}{8} * \frac{10}{21} + \frac{2}{7} * \frac{5}{14} + \frac{1}{6} * \frac{1}{21}$$

$$\mathcal{P}(B) = \frac{1807}{5232}$$

Remarque : Pour différencier loi Binomiale de loi hypergéométrique :

- Loi Binomiale : Tirage avec remise
- Loi Hypergéométrique : Tirage sans remise

Exercice : Soit 2 urnes U et V.

- U contient a boules blanches et b boules noires
- V contient b boules blanches et a boules noires

C'est un tirage sans remise.

U_n : "Le n-ième tirage s'effectue dans U"

V_n : "Le n-ième tirage s'effectue dans V"

B_n : "La n-ième boule tirée est blanche"

Si à l'étape n on a tirée une boule blanche, le tirage suivant s'effectue dans U, sinon dans V.

1. Calculer $\mathcal{P}_{B_n}(B_{n+1})$ et $\mathcal{P}_{\overline{B_n}}(B_{n+1})$
2. $p_n = \mathcal{P}(B_n)$. Etablir la relation de récurrence entre p_{n+1} et p_n
3. $$Montrer\ que \begin{cases} (p_n) & \rightarrow & \frac{1}{2} \\ n & \rightarrow & +\infty \end{cases}$$

Correction :

1)

$$\mathcal{P}_{B_n}(B_{n+1}) = \mathcal{P}_{U_{n+1}}(B_{n+1}) = \frac{a}{a+b}$$

$$\mathcal{P}_{\overline{B_n}}(B_{n+1}) = \mathcal{P}_{V_{n+1}}(B_{n+1}) = \frac{b}{a+b}$$

$$\mathcal{P}(B_{n+1}) = \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b} = 1$$

2) $B_{n+1} = (B_{n+1} \cap B_n) \cup (B_{n+1} \cap \overline{B_n})$ Système complet d'évènement B_n et $\overline{B_n}$

$$\mathcal{P}(B_{n+1}) = \mathcal{P}(B_{n+1} \cap B_n) + \mathcal{P}(B_{n+1} \cap \overline{B_n})$$

$$\mathcal{P}(B_{n+1}) = \mathcal{P}_{B_n}(B_{n+1}) * \mathcal{P}(B_n) + \mathcal{P}_{\overline{B_n}}(B_{n+1}) * \mathcal{P}(\overline{B_n})$$

$$p_{n+1} = \left(\frac{a}{a+b}\right)p_n + \left(\frac{b}{a+b}\right)(1-p_n)$$

$$p_{n+1} = \left(\frac{a-b}{a+b}\right)p_n + \frac{b}{a+b}$$

3)

Supposons que p_n est convergente. Soit l sa limite. l est un point fixe : $l = f(l)$

Soit α tel que : $f(\alpha) = \left(\frac{a-b}{a+b}\right)\alpha + \frac{b}{a+b} \Longrightarrow l = \left(\frac{a-b}{a+b}\right)l + \frac{b}{a+b}$

$\Longrightarrow (a+b)l = (a-b)l + b$

$\Longrightarrow 2bl = b$

$\Longrightarrow l = \frac{1}{2}$

Montrez que p_n est convergente :

$$p_{n+1} = \left(\frac{a-b}{a+b}\right)p_n + \frac{a}{a+b}$$

$$p_{n+1} - \frac{1}{2} = \left(\frac{a-b}{a+b}\right)p_n + \frac{b}{a+b} - \frac{1}{2} \Rightarrow p_{n+1} - \frac{1}{2} = \left(\frac{a-b}{a+b}\right)p_n + \frac{b-a}{2(a+b)}$$

$$p_{n+1} - \frac{1}{2} = \left(\frac{a-b}{a+b}\right)(p_n - \frac{1}{2})$$

Posons $q_n = p_n - \frac{1}{2} \Rightarrow q_{n+1} = \left(\frac{a-b}{a+b}\right)q_n$ suite géometrique de raison $\frac{a-b}{a+b}$

or $\left|\frac{a-b}{a+b}\right| < 1 \Rightarrow q_n \xrightarrow{n\to+\infty} 0 \Rightarrow p_n \xrightarrow{n\to+\infty} \frac{1}{2}$

Fonction génératrice

Définition : X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{C}, \mathcal{P})$ tel que $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$

$X(\Omega) = \{\text{valeurs de X}\}$. On définit sa fonction génératrice :

$$g_x(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n \mathcal{P}(X = n)$$

Remarque : $g_x(t) = E(t^X)$ (Lorsque elle existe. Elle peut diverger à l'infini dans quel cas elle n'existe pas).

$$g_x(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n \mathcal{P}(X = n) \quad - \quad \textit{Serie entiere}$$

Soit R_X le rayon de convergence de la série : elle converge sur $]-R_X; R_X[$

$g_X(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathcal{P}(X = n) = 1 \Rightarrow R_X/geq1$ (Rayon de convergence)

g_X est $C^{+\infty}$ (elle est infiniment dérivable) sur $]-R_X; R_X[$

Exemple : Soit $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ (Poisson). Calculer $g_x(t)$

$$g_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n * \mathcal{P}(X = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n * e^{-\lambda} * \frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

$$g_x(t) = e^{-\lambda} * e^{-\lambda t} = e^{\lambda(t-1)}$$

La loi d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ est entièrement déterminer par la donnée de sa fonction génératrice ($g_X(t)$).

Rappel : $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \ \forall t \in]-R; R[$

$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$. Donc $\mathcal{P}(X = n) = \frac{g_X^{(n)}(0)}{n!}$

Remarque : Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, alors :

$g_{X+Y}(t) = g_X(t) * g_Y(t)$ car $E(t^{X+Y}) = E(t^X) * E(t^Y)$

Proposition : $g_X^{(k)}(1) = E(X(X-1)...(X-k-1))$ — $\forall k \in \mathbb{N}$

$g_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n * \mathcal{P}(X = n)$	
$g'_X(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} n * t^{n-1} * \mathcal{P}(X = n)$	$g'_X(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\mathcal{P}(X = n) = E(X)$
$g''_X(t) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) * t^{n-2} * \mathcal{P}(X = n)$	$g''_X(1) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\mathcal{P}(X = n)$
	$= E(X(X-1))$

$$g_X^{(k)}(t) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)(n-2)...(n-k+1)t^{n-k} * \mathcal{P}(X = n)$$

$$g_X^{(k)}(1) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)(n-2)...(n-k+1) * \mathcal{P}(X = n) = E(X(X-1)...(X-k+1))$$

Exercice : Déterminez la fonction génératrice de $X \hookrightarrow G(p)$ où G est une loi géométrique.

$$\mathcal{P}(X = n) = p(1-p)^{n-1} = pq^{n-1} \ \mid \ q = 1 - p$$

$$g_X(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} t^n \mathcal{P}(X = n) = \sum_{n-1}^{+\infty} t^n p * q^{n-1} = p * t \sum_{n=1}^{+\infty} (tq)^{n-1}$$

$$g_X(t) = p * t * \frac{1}{1 - qt} \Rightarrow g_X(t) = \frac{pt}{1 - qt}$$

Exercice : Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes avec $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)$. Déterminez la loi de $Z = X + Y$.

$g_Z(t) = g_X(t) * g_Y(t)$ car X et Y indépendantes.

$g_Z(t) = e^{\lambda(t-1)} * e^{\mu(t-1)} = e^{(\lambda*\mu)(t-1)}$

$Z \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda + \mu)$

Formulaire :

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \sum_{n=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \quad \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

$$\sum_{k=0}^{a+b} \binom{a}{k} * \binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n} \quad | \quad (a,b,c) \in \mathbb{N} \quad | \quad \textit{Formule de Vandermande}$$

$$\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$$

Exercice : Dans une entreprise, on a mis au point un système de test pour vérifier la qualité du produit.

On test 10 produits ensemble :

- Si le test est positif, on accepte tous les produits.
- Si le test est négatif, on test à nouveau chaque produit individuellement.

La probabilité pour qu'un ensemble de 10 produits soient acceptés est de 0,9.

On test 50 produits par cycle.

1. Déterminez $X(\Omega)$ [X : nombre total de test]
2. Loi de $X, E(X)$

$X = 5$ si tous les lots sont bons

$X = 15$ si 1 lot est défectueux

$X = 25$ si 2 lots sont défectueux

$X = 35$ si 3 lots sont défectueux

$X = 45$ si 4 lots sont défectueux

$X = 55$ si 5 lots sont défectueux

Soit Y une va du nombre de lots défectueux

X	5	15	25	35	45	55
Y	0	1	2	3	4	5

$Y \hookrightarrow B(n,p)$ où $n = 5;\ p = 0,1$

$\mathcal{P}(Y = k) = \binom{5}{k}(0,1)^k(0,9)^{5-k}$

$E(Y) = np = 5 * 0,1 = 0,5\ \forall k \in [[0,5]]$

$X = 10Y + 5 \Rightarrow E(X) = 10 * E(X) + 5$

$E(X) = 10 * 0,5 + 5 = 10$